Журнал математической физики, анализа, геометрии
2005, т. 1, № 1, с. 53–70

Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!z^n$ и голоморфные решения некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве

С.Л. Гефтер

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина
E-mail:gefter@univer.kharkov.ua

В.Н. Мокренюк

ООО "ОМЕГА-Автопоставка"
ул. Промышленная, 1, пгт Васищево, Харьковский р-н, Харьковская обл., 62495, Украина
E-mail:mokr@ukr.net

Статья поступила в редакцию 29 июня 2004 г.

Пусть A — ограниченный оператор в банаховом пространстве. Изучен вопрос о существовании голоморфных решений уравнения $z^2Aw' + g(z) = w$. Кроме того, рассмотрены общие свойства степенных рядов вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n z^n$, $c_n \in \mathbb{C}$.

Нехай A — обмежений оператор у банаховому просторі. Вивчено питання про існування голоморфних розв'язків рівняння $z^2Aw' + g(z) = w$. Крім того, розглянуто загальні властивості степеневих рядів, що мають вигляд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n z^n$, $c_n \in \mathbb{C}$.

Введение

Часто при нахождении решения дифференциального уравнения с аналитическими коэффициентами в виде степенного ряда коэффициенты ряда однозначно определяются, но полученный степенной ряд имеет нулевой

Mathematics Subject Classification 2000: 34A20, 34A25, 34G10.

радиус сходимости (см., напр., [1, 2]). По-видимому, первый такой пример был исследован Эйлером [3] в связи с суммированием расходящегося ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!$. Он рассмотрел уравнение $x^2y' + y = x$ и получил его решение в виде $y = x\psi(x)$, где $\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n! x^n$ (обсуждение этого примера и исторические сведения см. в [4, 5]). Очевидно, что найденный ряд расходится при всех $x \neq 0$. В дальнейшем такие решения получили интерпретацию в рамках теории асимптотических рядов (см. [2, 5–9]).

В настоящей работе изучается следующий операторный аналог уравнения, рассмотренного Эйлером (для удобства перед неизвестной функцией изменен знак):

$$z^2Aw' + g(z) = w. \qquad (*)$$

Здесь A — линейный ограниченный оператор в комплексном банаховом пространстве и $g(z)$ — вектор-функция, голоморфная в некоторой окрестности нуля. Под решением уравнения понимается голоморфная в окрестности нуля вектор-функция, которая удовлетворяет в этой окрестности уравнению.

Сформулируем основной результат статьи.

Теорема 3.8. *Следующие условия эквивалентны:*
(1) уравнение $(*)$ *имеет решение для любой вектор-функции* $g(z)$*;*
(2) уравнение $z^2Aw' + bz = w$ *имеет решение для любого вектора* $b \in E$*;*
(3) оператор A *квазинильпотентен (т.е. имеет спектр, состоящий из единственной точки* $\lambda = 0$*) и его фредгольмова резольвента* $(1 - zA)^{-1}$ *является целой функцией экспоненциального типа.*

В качестве следствия, мы получаем условие существования голоморфного в окрестности ∞ решения уравнения $Aw' + w = h(z)$ (см. следствие 3.10).

Теорему 3.8 можно рассматривать как еще одну иллюстрацию необычных свойств объектов, связанных с квазинильпотентными операторами (см., напр., [10, пп. 4.6 и 4.10], [11, гл. IV] и [12]).

Исследование уравнения $(*)$ основано на понятии A-голоморфного формального степенного ряда (см. определение 1.1), которое для случая вольтерровых операторов рассматривалось в работе Пере [13] (см. также [14, п. 8]) и в общем случае было введено в [15]. Так, условия теоремы 3.8 эквивалентны $A-$голоморфности ряда $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ (см. предложение 3.1 и теорему 1.5). Отметим, что для любой замкнутой коммутативной подалгебры алгебры всех ограниченных линейных операторов в пространстве E, содержащей оператор A, возникающая здесь функция операторного аргумента $\varphi_A(T) = \sum_{n=0}^{\infty} n! A^n T^n$

является аналитической по Лорху в некоторой окрестности нуля этой подалгебры (см. [10, п. 3.19] и замечание 1.9). Понятие A-голоморфности изучается в первых двух разделах статьи.

Уравнение $(*)$ не является разрешенным относительно производной. Отметим, что на полуоси $t \geq 0$ задача Коши для таких уравнений с постоянными операторными коэффициентами была изучена А.Г. Руткасом [16, 17].

1. (A, b)-голоморфные степенные ряды

Пусть E — комплексное банахово пространство, $A : E \to E$ — ограниченный линейный оператор, $b \in E$ и $f(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ — формальный степенной ряд над полем $\mathbb{C}$. Положим

$$f(zA) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

$$f(zA)b := \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n b z^n, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{1.2}$$

Тогда $f(zA)$ — степенной ряд с коэффициентами из алгебры $B(E)$ всех ограниченных операторов в пространстве E, а $f(zA)b$ — степенной ряд с коэффициентами из E. Радиус сходимости ряда (1.1) будем обозначать через $R_A(f)$, а ряда (1.2) — через $R_{A,b}(f)$.

Определение 1.1. *Степенной ряд $f(\zeta)$ будем называть A-голоморфным, если $R_A(f) > 0$, и (A, b)-голоморфным, если $R_{A,b}(f) > 0$.*

Очевидно, что A-голоморфный степенной ряд является (A, b)-голоморфным для всех векторов $b \in E$, причем $R_{A,b}(f) \geq R_A(f)$. При этом, если $|z| < R_A(f)$, то сумма ряда в правой части равенства (1.2) получается применением оператора $f(zA)$ к вектору b.

З а м е ч а н и е 1.2. Пусть степенной ряд f имеет положительный радиус сходимости $R(f)$. Тогда такой ряд является A-голоморфным для любого ограниченного оператора A, причем, если $\rho(A)$ — спектральный радиус оператора A, и $|z|\rho(A) < R(f)$, то обозначение $f(zA)$ имеет обычный смысл: оператор $f(zA)$ является результатом применения голоморфной функции f к оператору zA (см., напр., [10, п. 5.2]).

П р и м е р 1.3. Предположим, что $b \in ker A^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f(zA)b = \sum_{n=0}^{m-1} c_n A^n b z^n,$$

т.е. любой степенной ряд $f(\zeta)$ является (A,b)-голоморфным.

Если пространство конечномерно, то в наиболее интересном для нашей ситуации случае верно и обратное.

Предложение 1.4. *Пусть* $\dim E < \infty$ *и* $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ *— степенной ряд с нулевым радиусом сходимости. Если* f *является* (A,b)*-голоморфным, то* $b \in ker A^m$ *для некоторого* $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $R_{A,b}(f) > 0$. Согласно векторному варианту формулы Коши–Адамара [10, теорема 3.11.4]

$$\frac{1}{R_{A,b}(f)} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|\|A^n b\|} < \infty.$$

Так как пространство E конечномерно, то существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n b\|}$ (см. [18, п. 9.1] или [19, теорема 5.1]). С другой стороны, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n b\|} = 0$, т.е. функция $F_{A,b}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} A^n b z^n$ — целая. Пусть теперь $R_A(z) = (A - zI)^{-1}$ — резольвента оператора A. Поскольку $dim E < \infty$, то $R_A(z)$ — рациональная функция [20, гл. I, §5, п. 3], т.е. ее можно представить в следующем виде:

$$R_A(z) = \frac{1}{Q(z)} \sum_{k=0}^{l} B_k z^k,$$

где $B_0, B_1, \ldots, B_l$ — операторы в E, $Q(z)$ — скалярный полином. Если теперь $F_A(z) = (I - zA)^{-1}$ — фредгольмова резольвента оператора A, то $F_{A,b}(z) = F_A(z)b$ при $|z| < \frac{1}{\|A\|}$ и $F_A(z) = -\frac{1}{z} R_A(\frac{1}{z})$. Следовательно, функция $F_{A,b}(z)$ рациональна. Поэтому она является полиномом, т.е. найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что $A^n b = 0$, если $n \geq m$. ■

Используя 1.3, нетрудно привести примеры (A,b)-голоморфных формальных степенных рядов, которые не являются A-голоморфными. Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.5. *Если формальный степенной ряд* f *является* (A,b)*-голоморфным для всех* $b \in E$, *то он* A*-голоморфен.*

Доказательство. Для $k \in \mathbb{N}$ положим

$$F_k = \{x \in E : |c_n|\|A^n x\| \leq k^n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Очевидно, что множество F_k замкнуто. Покажем, что $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. Пусть $b \in E$. Так как f является (A,b)-голоморфным, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n b z^n$ сходится при некотором $z \neq 0$. Поэтому существует такое $M > 0$, что $\|c_n A^n b z^n\| \le M$, т.е. $|c_n|\|A^n b\| \le \dfrac{M}{|z|^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Теперь можно найти такое $k \in \mathbb{N}$, что $|c_n|\|A^n b\| \le k^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, $b \in F_k$, и равенство $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ доказано. Согласно теореме Бэра найдется $k_0 \in \mathbb{N}$, для которого множество F_{k_o} содержит шар $\|x - x_0\| \le r$. Следовательно, если $\|h\| \le r$, то $|c_n|\|A^n(x_0+h)\| \le k_0^n$. Отсюда получаем $|c_n|\|A^n h\| = |c_n|\|A^n(x_0+h) - A^n x_0\| \le 2{k_0}^n$. Поэтому

$$|c_n|\|A^n\| = \frac{1}{r}\sup_{\|u\|\le 1} |c_n|\|A^n(ru)\|$$

$$= \frac{1}{r}\sup_{\|h\|\le r} |c_n|\|A^n h\| \le \frac{2}{r}{k_0}^n, \quad n = 1,2,\dots .$$

Следовательно, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|\|A^n\|} \le k_0$, т.е. степенной ряд $f(zA) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n z^n$ имеет положительный радиус сходимости. Теорема доказана. ■

З а м е ч а н и е 1.6. Применяя рассуждение, использованное при доказательстве теоремы 1.5, к формальному степенному ряду с произвольными коэффициентами из банахова пространства, можно получить такой аналог теоремы Данфорда–Хилле о сильной голоморфности слабо голоморфной вектор-функции (см. [10, теорема 3.10.1]):

Пусть E — банахово пространство и $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $c_n \in E$ — формальный степенной ряд. Если для каждого функционала $l \in E^*$ степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} l(c_n) z^n$ имеет положительный радиус сходимости, то и ряд f имеет положительный радиус сходимости.

Следующее утверждение показывает, что в случае, когда оператор A не является квазинильпотентным, понятие A-голоморфности совпадает с обычным понятием голоморфности, а нетривиальным (по сравнению с обычной теорией голоморфных функций) является случай, когда оператор A квазинильпотентен.

Предложение 1.7. *Если оператор A имеет положительный спектральный радиус $\rho(A)$, то степенной ряд $f(\zeta)$ является A-голоморфным тогда и* *только тогда, когда он имеет ненулевой радиус сходимости. Таким образом, если $f(\zeta)$ имеет нулевой радиус сходимости и является A-голоморфным, то оператор A квазинильпотентен.*

Доказательство. Пусть $R(f)$ — радиус сходимости ряда f. Так как $\rho(A) > 0$, то используя векторный вариант формулы Коши–Адамара для радиуса сходимости и формулу Гельфанда для спектрального радиуса, получаем

$$\frac{1}{R_A(f)} = \overline{\lim_{n\to\infty}}(|c_n| \|A^n\|)^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}|c_n|^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R(f)}\rho(A).$$

Следовательно, условия $R_A(f) > 0$ и $R(f) > 0$ эквивалентны. ■

Замечание 1.8. Отметим, что, если оператор A квазинильпотентен и радиус сходимости ряда f положителен, то $f(zA)$ — целая функция (см. замечание 1.2).

Замечание 1.9. Понятие A-голоморфности формального степенного ряда следующим образом связано с понятием аналитической по Лорху функции в коммутативной банаховой алгебре. Пусть $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n$, $c_n \in \mathbb{C}$ — A-голоморфный степенной ряд и M — замкнутая коммутативная подалгебра алгебры всех ограниченных операторов в пространстве E, содержащая оператор A и единичный оператор. Положим $f_A(T) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n T^n$, $T \in M$, $\|T\| < R_A(f)$. Тогда функция f_A является аналитической по Лорху в открытом шаре $\|T\| < R_A(f)$ алгебры M (см. [10, п. 3.19]).

2. Ряд Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty} n!\zeta^n$

В этом разделе мы обсудим одно условие A-голоморфности формального степенного ряда

$$\varphi(\zeta) = 1 + \zeta + 2!\zeta^2 + 3!\zeta^3 + \dots, \tag{2.1}$$

по-видимому, впервые рассмотренного Эйлером [3], и приведем примеры операторов A, для которых ряд φ является A-голоморфным.

Напомним, что целая функция $g(z)$ со значениями в банаховом пространстве называется функцией экспоненциального типа σ $(0 \le \sigma < \infty)$, если

$$\overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{ln\|g(z)\|}{|z|} = \sigma$$

(см. [21, с. 95]).

Предложение 2.1. *Пусть* $F_A(z) = (1-zA)^{-1}$ *— резольвента Фредгольма оператора* A*. Ряд Эйлера* φ *является* A*-голоморфным тогда и только тогда, когда* $F_A(z)$ *— целая функция экспоненциального типа. При этом, если* σ *— экспоненциальный тип* $F_A(z)$*, то* $R_A(\varphi) = \dfrac{1}{\sigma}$ *и* $\varphi(zA) = \dfrac{1}{z}\gamma_A(\dfrac{1}{z})$*, где* $\gamma_A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!A^n}{z^{n+1}}$, $\quad |z| > \sigma$ *— преобразование Бореля функции* $F_A(z)$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ряд φ является A-голоморфным. Тогда

$$\frac{1}{R_A(\varphi)} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\|A^n\|} < +\infty \tag{2.2}$$

и оператор A квазинильпотентен (см. предложение 1.7). Следовательно, функция $F_A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n z^n$ является целой. Теперь (2.2) показывает, что эта функция имеет экспоненциальный тип σ, где $\sigma = \dfrac{1}{R_A(\varphi)}$ (см. [21, с. 95]). Обратно, если $F_A(z)$ — целая функция экспоненциального типа σ, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!\|A^n\|} = \sigma$, т.е. $R_A(\varphi) = \dfrac{1}{\sigma} > 0$. ■

Предложение 2.2. *Пусть экспоненциальный тип резольвенты Фредгольма* $(1 - zA)^{-1}$ *равен* σ*. Тогда*

$$\varphi(zA) = \int\limits_0^{\infty} (1 - tzA)^{-1} e^{-t} dt, \quad |z| < \frac{1}{\sigma}. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 2.1 функция $\varphi(zA) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n!A^n z^n$ голоморфна в круге $|z| < \dfrac{1}{\sigma}$. Функцией, ассоциированной по Борелю с $\varphi(zA)$, является фредгольмова резольвента $F_A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n z^n$ (в этом доказательстве мы используем терминологию из п. 7.8 книги [22]). Повторяя доказательство теоремы Бореля (с необходимой заменой модулей на нормы), получаем равенство $\varphi(zA) = \int\limits_0^{\infty} F_A(tz)e^{-t}dt$, $|z| < \dfrac{1}{\sigma}$ (см. [22, п. 7.8], а также [23, гл. I, §20]). Утверждение доказано. ■

Приведем два примера явного вычисления функции $\varphi(zA)$.

П р и м е р 2.3. (Оператор интегрирования).
Пусть $E = L^2(0,1)$. Для $\xi \in L^2(0,1)$ положим

$$(A\xi)(x) = \int_0^x \xi(y)dy. \tag{2.4}$$

Тогда

$$(A^n\xi)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-y)^{n-1}\xi(y)dy \quad \text{и} \quad \|A^n\| \le \frac{1}{n!}, \quad n \ge 1 \tag{2.5}$$

(см., напр., [24, решение задачи 641]).
Покажем, что ряд Эйлера (2.1) является A-голоморфным, причем $R_A(\varphi) = 1$. Согласно формуле Коши–Адамара имеем

$$\frac{1}{R_A(\varphi)} = \overline{\lim_{n\to\infty}}(n!\|A^n\|)^{\frac{1}{n}} \le 1,$$

т.е. $R_A(\varphi) \ge 1$. Покажем теперь, что $R_A(\varphi) \le 1$. Для этого проверим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!A^n z^n$ расходится по операторной норме, если $|z| > 1$. Пусть $\xi_0(x) = 1$, $x \in (0,1)$. Тогда

$$(A^n\xi_0)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-y)^{n-1}dy = \frac{x^n}{n!}, \quad x \in (0,1),$$

и

$$\langle A^n\xi_0, \xi_0\rangle = \int_0^1 (A^n\xi_0)(x)\overline{\xi_0(x)}dx = \int_0^1 \frac{x^n}{n!}dx = \frac{1}{n\cdot n!}.$$

Следовательно, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\langle A^n\xi_0,\xi_0\rangle z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}$, и полученный ряд расходится при $|z| > 1$. Таким образом, при $|z| > 1$ ряд расходится даже в слабой операторной топологии.
Найдем теперь явную формулу для $\varphi(zA)$. Сначала рассмотрим вспомогательный ряд $\psi(\zeta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-1)!\zeta^n$. Тогда $\varphi(\zeta) = 1 + \zeta\psi'(\zeta)$, ψ является A-голоморфным и $R_A(\psi) = 1$. Из (2.5) нетрудно вывести, что

$$(\psi(zA)\xi)(x) = \int_0^x \frac{z\xi(y)dy}{1 - z(x-y)}, \qquad |z| < 1. \tag{2.6}$$

Следовательно,

$$(\varphi(zA)\xi)(x) = \xi(x) + \int\limits_0^x \frac{z\xi(y)dy}{(1-z(x-y))^2}, \quad |z| < 1. \tag{2.7}$$

П р и м е р 2.4. Пусть H — гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_k : k = 0, 1, 2, \ldots\}$. Зададим оператор A следующими равенствами:

$$Ae_0 = 0, \quad Ae_k = \frac{1}{k}e_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Нетрудно проверить, что

$$A^n e_k = \begin{cases} \dfrac{(k-n)!}{k!}e_{k-n} & , \ k \geq n \\ \qquad 0 & , \ 0 \leq k < n \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \|A^n\| = \frac{1}{n!}.$$

Поэтому ряд Эйлера (2.1) является A–голоморфным, причем $R_A(\varphi) = 1$. Далее, в базисе e_k оператор A имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \end{pmatrix}.$$

Так как $n!A^n e_k = \dfrac{n!(k-n)!}{k!}e_{k-n} = \dfrac{1}{C_k^n}e_{k-n}, \quad k \geq n$, то для оператора $\varphi(zA)$ получаем матрицу

$$\varphi(zA) = \begin{pmatrix} 1 & z & z^2 & z^3 & z^4 & \ldots \\ 0 & 1 & \frac{1}{C_2^1}z & \frac{1}{C_3^2}z^2 & \frac{1}{C_4^3}z^3 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{C_3^1}z & \frac{1}{C_4^2}z^2 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{C_4^1}z & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{pmatrix}, \qquad |z| < 1.$$

3. Уравнение $z^2Aw' + g(z) = w$

Пусть E — банахово пространство, $A : E \to E$ — ограниченный линейный оператор и $g(z)$ — E-значная функция, голоморфная в некоторой окрестности нуля. В этом разделе мы рассматриваем вопрос о существовании решения уравнения $z^2Aw' + g(z) = w$. При этом под решением уравнения мы понимаем вектор-функцию, которая голоморфна в окрестности нуля, и удовлетворяет в этой окрестности уравнению.

Сначала рассмотрим случай, когда $g(z) = zb$, где b — вектор из E. Отметим, что в этом случае решение уравнения удовлетворяет условию $w(0) = 0$.

Предложение 3.1. *Уравнение*

$$z^2Aw' + zb = w \tag{3.1}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда ряд Эйлера $\varphi(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\zeta^n$ *является* (A, b)*-голоморфным. При этом решение единственно и имеет вид*

$$w(z) = z\varphi(zA)b = \sum_{n=0}^{\infty} n!A^n bz^{n+1}, \qquad |z| < R_{A,b}(\varphi).$$

Доказательство. Пусть $w(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n z^n$ — решение уравнения (3.1). Тогда после подстановки в уравнение получаем

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)Aw_{n-1}z^n + zb = \sum_{n=1}^{\infty} w_n z^n.$$

Следовательно, $w_1 = b$, $w_n = (n-1)Aw_{n-1}$, $n \geq 2$, т.е. $w_n = (n-1)!A^{n-1}b$, $n \geq 1$. Таким образом,

$$w(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)!A^{n-1}bz^n = z\sum_{n=0}^{\infty} n!A^n bz^n.$$

Так как ряд $w(z)$ имеет ненулевой радиус сходимости, то ряд $\varphi(\zeta)$ является (A, b)-голоморфным. Обратно, если ряд Эйлера $\varphi(\zeta)$ является (A, b)-голоморфным, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!A^n bz^{n+1}$ имеет ненулевой радиус сходимости и нетрудно проверить, что этот ряд является решением уравнения (3.1). ■

П р и м е р 3.2. Пусть A — оператор интегрирования в пространстве $E = L^2(0,1)$ (см. пример 2.3). Будем рассматривать голоморфные вектор-функции $w(z)$ со значениями в E как функции двух переменных: $w(z,x) := w(z)(x)$, $x \in (0,1)$. Тогда уравнение (3.1) можно записать в следующем виде:

$$z^2 \int\limits_0^x \frac{\partial w}{\partial z}(z,y)dy + zb(x) = w(z,x),$$

где $b \in L^2(0,1)$. Так как ряд Эйлера $\varphi(\zeta)$ является A-голоморфным и $R_A(\varphi) = 1$ (см. пример 2.3), то используя 3.1 и формулу (2.7), получаем, что в круге $|z| < 1$ это уравнение имеет решение

$$w(z,x) = z(\varphi(zA)b)(x) = zb(x) + \int\limits_0^x \frac{z^2 b(y)dy}{(1 - z(x-y))^2}.$$

Используя утверждение 1.4, из 3.1 получаем

Следствие 3.3. *Пусть пространство E конечномерно. Уравнение* (3.1) *имеет решение тогда и только тогда, когда вектор b лежит в ядре некоторой степени оператора A. При этом, если $b \in ker A^m$, то решение имеет вид*

$$w(z) = \sum_{n=0}^{m-1} n!A^n bz^{n+1}.$$

Рассматривая в уравнении (3.1) вместо вектора b вектор Ab, из 3.1 получаем

Следствие 3.4. *Если ряд Эйлера $\varphi(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\zeta^n$ является A-голоморфным, то уравнение*

$$z^2 Aw' + zAb = w(z) \tag{3.2}$$

имеет единственное решение $w(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-1)!A^n bz^n$, $|z| < R_A(\varphi)$.

В следующем примере суммма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-1)!A^n bz^n$ неявно присутствует в формуле для решения некоторого дифференциального уравнения с частными производными.

П р и м е р 3.5. Пусть $E = C[0,1]$ и A — оператор интегрирования: $(Au)(x) = \int\limits_0^x u(y)dy$. Тогда ряд Эйлера $\varphi(\zeta)$ является A-голоморфным и $R_A(\varphi) = 1$ (доказательство аналогично приведенному в примере 2.3). Для $b \in C[0,1]$ рассмотрим уравнение (3.2) на полуоси $t \geq 0$. В нашем примере его можно записать в следующем виде:

$$t^2 \int\limits_0^x \frac{\partial w}{\partial t}(t,y)dy + t\int\limits_0^x b(y)dy = w(t,x). \tag{3.3}$$

Таким образом, функция $w(t,x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными

$$t^2\frac{\partial w}{\partial t} + tb(x) = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{3.4}$$

и условиям $w(0,x) = 0$, $w(t,0) = 0$, $x \in [0,1]$, $t \geq 0$. Нетрудно проверить, что любое непрерывно дифференцируемое решение соответствующего однородного уравнения $t^2\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial x}$, удовлетворяющее этим условиям, имеет вид

$$w_0(t,x) = \beta(x - \frac{1}{t}),\ t > 0,\ x \in [0,1],$$

где $\beta \in C^1(-\infty, 1)$ и $\beta(s) = 0$, если $s < 0$. Так как $x - \dfrac{1}{t} < 0$ при $t \in (0,1)$ и $x \in [0,1]$, то $w_0(t,x) = 0$, если $(t,x) \in [0,1) \times [0,1]$. Используя следствие 3.3 и формулу (2.6), получаем, что при $(t,x) \in [0,1) \times [0,1]$ уравнение (3.4) с указанными нулевыми условиями имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение

$$w(t,x) = \int\limits_0^x \frac{tb(y)dy}{1 - t(x-y)}.$$

Вернемся к уравнению $z^2Aw' + g(z) = w$ и рассмотрим теперь случай, когда $g(z) = z^k b_k$, $b_k \in E$, $k \in \mathbb{N}$. Нетрудно получить следующий аналог утверждения 3.1.

Лемма 3.6. *Уравнение*

$$z^2Aw' + z^k b_k = w \tag{3.5}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда ряд $\varphi(\zeta)$ *является* (A, b)*-голоморфным. При этом решение единственно и имеет вид*

$$w(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(k-1)!} A^{n-k} b_k z^n. \tag{3.6}$$

Кроме того, если R_k *— радиус сходимости ряда* (3.6), *то* $R_k \geq R_A(\varphi)$.

З а м е ч а н и е 3.7. При $k = 0$ уравнение (3.5) будет иметь вид

$$z^2 A w' + b_0 = w.$$

Легко проверить, что для любых A и b_0 это уравнение имеет единственное решение $w(z) = b_0$.

Наконец, рассмотрим произвольное неоднородное уравнение

$$z^2 A w' + g(z) = w, \tag{3.7}$$

где вектор-функция $g(z)$ голоморфна в круге $|z| < R(g)$ (напомним, что мы изучаем голоморфные в окрестности нуля решения уравнения). Отметим, что однородное уравнение (3.7) может иметь только нулевое решение (см. предложение 3.1).

Теорема 3.8. *Следующие условия эквивалентны:*
(1) уравнение (3.1) *имеет решение для любого вектора* $b \in E$*;*
(2) уравнение (3.7) *имеет решение для любой вектор-функции* $g(z)$*;*
(3) оператор A *квазинильпотентен и его фредгольмова резольвента* $(1 - zA)^{-1}$ *является целой функцией экспоненциального типа.*
При этом, если выполнено одно из этих условий, то уравнение (3.7) *имеет единственное решение*

$$w(z) = g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(n-1)!}{k!(k-1)!} A^{n-k} g^{(k)}(0) z^n,$$

определенное в круге $|z| < \dfrac{1}{2} min\{R(g), R_A(\varphi)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 3.1 и теореме 1.5 условие (1) эквивалентно A-голоморфности ряда Эйлера $\varphi(\zeta)$. Следовательно, условия (1) и (3) эквивалентны (см. предложения 1.7 и 2.1). Очевидно также, что из (2) следует (1). Покажем теперь, что выполнено условие (2), если ряд $\varphi(\zeta)$

является A-голоморфным. Пусть $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$, $w_0(z) = b_0$ и $w_k(z)$ — решение уравнения (3.5), $k = 1, 2, \ldots$. Достаточно проверить, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(z)$ сходится равномерно в круге $|z| \le r$ для всех $r < \frac{1}{2} min\{R_A(\varphi), R(g)\}$. Пусть сначала $|z| < r_1 < R_A(\varphi)$. Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!\|A\|^n r_1^n$ сходится, то существует такая константа $M_1 > 0$, что $n!\|A^n\| r_1^n \le M_1$, т.е. $n!\|A^n\| \le \frac{M_1}{r_1^n}$, $n = 0, 1, 2 \ldots$. Поэтому для $k \ge 1$ получаем

$$\|w_k(z)\| \le \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=k}^{\infty} (n-1)!\|A^{n-k} b_k\||z|^n$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+k-1)!\|A^n b_k\||z|^{n+k}$$

$$\le \frac{\|b_k\||z|^k}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} n!\|A^n\|(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)|z|^n$$

$$\le \frac{M_1\|b_k\||z|^k}{(k-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)\left(\frac{|z|}{r_1}\right)^n$$

$$= \frac{M_1\|b_k\||z|^k}{(k-1)!} \frac{(k-1)!}{\left(1-\frac{|z|}{r_1}\right)^k} = \frac{M_1\|b_k\||z|^k}{\left(1-\frac{|z|}{r_1}\right)^k}.$$

Далее, для $0 < r_2 < R(g)$ найдется такая константа $M_2 > 0$, что $\|b_k\| \le \frac{M_2}{r_2^k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Поэтому, если $|z| < r_0 < min\{R_A(\varphi), R(g)\}$, то

$$\|w_k(z)\| \le \frac{M_1\|b_k\||z|^k}{\left(1-\frac{|z|}{r_0}\right)^k} \le \frac{M_1 M_2 \left(\frac{|z|}{r_0}\right)^k}{\left(1-\frac{|z|}{r_0}\right)^k}.$$

Если теперь $|z| \le r < \frac{1}{2}r_0 < \frac{1}{2}min\{R_A(\varphi), R(g)\}$, то $\frac{r}{r_0} < \frac{1}{2}$, $\dfrac{\frac{r}{r_0}}{1-\frac{r}{r_0}} < 1$ и

$$\|w_k(z)\| \le M_1M_2\left(\frac{\frac{|z|}{r_0}}{1-\frac{|z|}{r_0}}\right)^k \le M_1M_2\left(\frac{\frac{r}{r_0}}{1-\frac{r}{r_0}}\right)^k.$$

Таким образом, в круге $|z| \le r$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} w_k(z)$ сходится равномерно. Теорема доказана. ■

З а м е ч а н и е 3.9. Если $A \ne 0$ и $b \ne 0$, то в скалярном случае уравнение из (3.1) не имеет решения, голоморфного в окрестности нуля. Однако некоторые неоднородные уравнения вида (3.7) могут иметь решения и в скалярном случае. Например, уравнение $z^2w' + z - z^2 = w$ имеет решение $w(z) = z$.

Введя в уравнение из (3.7) переменную $\frac{1}{z}$ вместо переменной z, из теоремы 3.8 и предложения 3.1 получаем

Следствие 3.10. *Пусть* $h(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots$ *— вектор-функциия, голоморфная в окрестности бесконечности. Рассмотрим уравнение*

$$Aw' + w = h(z). \tag{3.8}$$

Если оператор A квазинильпотентен и его фредгольмова резольвента является целой функцией экспоненциального типа, то уравнение (3.8) имеет единственное решение, голоморфное в окрестности бесконечности. В частности, если $h(z) = \frac{b}{z}$, $b \in E$, *то решение уравнения* $Aw' + w = \frac{b}{z}$ *имеет вид* $w(z) = \frac{1}{z}\varphi(\frac{1}{z}A)b = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n!A^nb}{z^{n+1}}$, $|z| > \frac{1}{R_A(\varphi)}$.

Покажем, что ряд Эйлера может возникать и при нахождении и исследовании решений уравнения (3.8), которые голоморфны в окрестности нуля.

П р и м е р 3.11. Пусть H — гильбертово пространство с ортонормированным базисом $\{e_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$, A — оператор из примера 2.5 и A^* — сопряженный к нему оператор. Рассмотрим следующую задачу Коши $\begin{cases} Aw' = w \\ w(0) = e_0 \end{cases}$. Нетрудно проверить, что одно из решений этой задачи имеет вид $w(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} e_n z^n$, $|z|<1$. Так как $A^* e_n = \dfrac{1}{n+1} e_{n+1}$, то

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n! A^{*^n} e_0 z^n = \varphi(zA^*)e_0, \ |z|<1.$$

В примере 3.11 степенной ряд $w(z)$ имел конечный радиус сходимости. Это явление связано со следующим общим наблюдением.

Предложение 3.12. *Пусть $w_0 \in E$ и $w_0 \neq 0$. Рассмотрим задачу Коши*

$$\begin{cases} Aw' = w \\ w(0)=w_0 \end{cases}. \tag{3.9}$$

Если ряд Эйлера A-голоморфен, то задача (3.9) не имеет целых решений.

Доказательство. Пусть $w(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n z^n$ — решение задачи Коши (3.9). Подставляя ряд $w(z)$ в уравнение $Aw'=w$, получаем, что

$$Aw_n = \frac{1}{n} w_{n-1}, \quad n=1,2,\dots .$$

Следовательно, $A^n w_n = \dfrac{1}{n!} w_0$ и $\|w_0\| = \|n! A^n w_n\| \le n! \|A^n\| \|w_n\|$. Отсюда

$$\sqrt[n]{n!\|A^n\|}\,\sqrt[n]{\|w_n\|} \ge \sqrt[n]{\|w_0\|}.$$

Так как $\sqrt[n]{\|w_0\|} \to 1$, то второй сомножитель в левой части последнего неравенства может стремиться к нулю только при стремлении первого сомножителя к бесконечности. Утверждение доказано. ■

В заключение приведем пример оператора, для которого ряд Эйлера A-голоморфен, но задача Коши (3.9) не имеет ненулевого голоморфного решения.

Пример 3.13. В $L^2(0,1)$ рассмотрим следующий оператор интегрирования:

$$(A\xi)(x) = -\int_x^1 \xi(y)dy.$$

Тогда задача Коши *на полуоси* $t \geq 0$

$$\begin{cases} Aw' = w \\ w(0) = w_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение

$$w(t)(x) = \begin{cases} w_0(x+t), & x+t \in [0,1], \\ 0, & x+t \notin [0,1], \end{cases}$$

причем оператор A^{-1} будет производящим для сильно непрерывной нильпотентной полугруппы (см. [12, с. 432–435]). Следовательно, эта задача не может иметь *голоморфного* решения, если $w_0 \neq 0$.

Список литературы

[1] *E.A. Coddington and N. Levinson*, Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York–Toronto–London, 1955.

[2] *F.W J. Olver*, Asymptotics and special functions. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, New York–London, 1974.

[3] *L. Euler*, De Seriebus Divergentibus. Leonardi Euleri Opera Omnia I.14, Teubner, Leipzig–Berlin, 1925.

[4] *G.H. Hardy*, Divergent Series. Clarendon Press, Oxford, 1949.

[5] *J.-P. Ramis*, Divergent series and asymptotic theories. Suppl. au bulletin de la SMF. Societe Mathematique de France, 1993. (French)

[6] *V. Vazov*, Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations. Mir, Moscow, 1968. (Russian)

[7] *M.V. Fedoryuk*, Asymptotic methods for linear ordinary differential equations. Nauka, Moscow, 1983. (Russian)

[8] *N.I. Shkil', I.I. Starun, and V.P. Yakovets*, Asymptotic integration of linear systems of ordinary differential equations. Vyshcha Shkola, Kiev, 1989. (Russian)

[9] *N.I. Shkil', I.I. Starun, and V.P. Yakovets*, Asymptotic integration of linear systems of ordinary differential equations with degeneracies. Vyshcha Shkola, Kiev, 1991. (Russian)

[10] *E. Hille and R.S. Phillips*, Functional analysis and semi-groups. AMS, Providence, RI, 1957.

[11] *V. Volterra*, Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. Dover Publ., Inc., New York (1959).

[12] *I.C. Gohberg and M.G. Kreĭn*, Theory of Volterra operators in Hilbert space and its applications. Nauka, Moscow, 1967. (Russian)

[13] *J. Pérès*, Sur les fonctions permutables de premiere espece de M. Vito Volterra. These de doctorat. Gauthier–Villars, Paris (1915).

[14] *V. Volterra and J. Pérès*, Leçons sur la composition et les fonctions permutables. Gauthier–Villars, Paris, 1924.

[15] *S.L. Gefter*, On formal power series in Banach algebras. — Abstracts Int. Conf. Funct. Anal., Kyiv (2001), 29–30. (Russian)

[16] *A.G. Rutkas*, The Cauchy problem for the equation $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$. — *Diff. Uravn.* **11** (1975), 1996–2010. (Russian)

[17] *A.G. Rutkas*, Classification and properties of solutions of the equation $Ax' + Bx = f(t)$. — *Diff. Uravn.* **25** (1989), 1150–1155.

[18] *M.A. Krasnosel'skij, G.M. Vainikko, P.P. Zabrejko, Ya.B. Rutitskij, and V.Ya. Stetsenko*, Approximate solution of operator equation. Nauka, Moscow, 1969. (Russian)

[19] *A. Atzmon*, Power regular operators. — *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 3101–3109.

[20] *T. Kato*, Perturbation theory for linear operators. Mir, Moscow, 1972. (Russian)

[21] *Yu.L. Daletskij and M.G. Krejn*, Stability of solutions of differential equations in Banach space. Nauka, Moscow, 1970. (Russian)

[22] *E.T. Whittaker and G.N. Watson*, A course of modern analysis. Univ. Press, Cambridge, 1927.

[23] *B.Ya. Levin*, Distribution of zeros of entire functions. AMS, Providence, RI, 1964.

[24] *A.A. Kirillov, A.D. Gvishiani*, Theorems and problems of functional analysis. Second ed. Nauka, Moscow, 1988. (Russian)

The power series $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!z^n$ and holomorphic solutions of some differential equations in a Banach space

S.L. Gefter, V.N. Mokrenyuk

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering
National Academy of Sciences of Ukraine, 47 Lenin Ave., Kharkov, 61103, Ukraine

Let A be a bounded operator on a Banach space. A question about the existence of holomorphic solutions of the equation $z^2Aw' + g(z) = w$ is studied. Moreover, general properties of power series of the form $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n A^n z^n,\ c_n \in \mathbb{C}$ are considered.

Key words: divergent series, differential equations, Banach space.