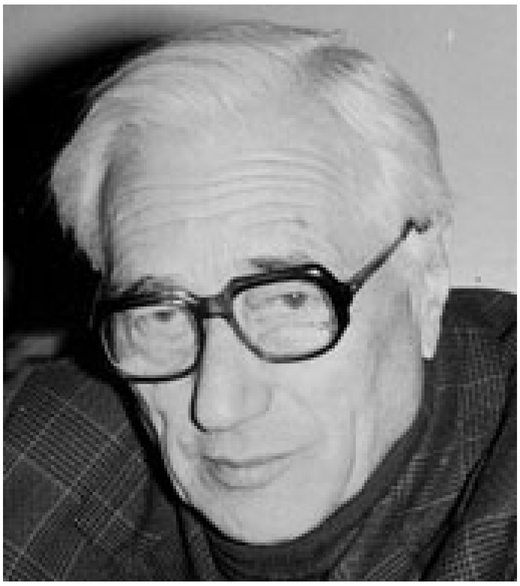
Із історії Харківського математичного товариства

Нижеследующая статья по существу является текстом доклада, прочитанного мною 14 августа 2006 года в Харькове на конференции, посвященной 100-летию Бориса Яковлевича Левина. При редактировании я добавил список литературы и несколько подстрочных примечаний. Читатель, интересующийся биографией Б.Я. Левина, может обратиться к статьям в Успехах [I.1]–[I.5] и предисловию к его лекциям [I.8].

Я благодарен редакции журнала за предоставленную возможность опубликовать этот текст, Ю.И. Любарскому, приславшему замечания к рукописному варианту этого текста, и А.Е. Фрынтову, любезно набравшему этот текст в LaTeX и также высказавшему ряд критических замечаний.

М. Содин, Тель-Авив, 28.11.2019.

Борис Яковлевич Левин



1906–1993

В этом году исполняется 100 лет со дня рождения и 13 лет со дня смерти Бориса Яковлевича Левина, замечательного математика и яркого человека. Б.Я. (так его называли друзья и коллеги) внес огромный вклад в развитие анализа. Вместе с Наумом Ильичем Ахиезером и Марком Григорьевичем Крейном, с которыми его связывала многолетняя дружба и научное сотрудничество[1], он создал выдающуюся теоретико-функциональную школу, процветавшую на протяжении полувека в Одессе и в Харькове.

[1] Воспоминания Б.Я. о М.Г. Крейне были опубликованы [II.5]. Воспоминания Б.Я. о Н.И. Ахиезере, с которыми он выступал на заседании Харьковского математического общества, к сожалению, не были опубликованы.

Б.Я. взрастил блестящую плеяду учеников. Среди них: А.П. Артеменко (подготовивший замечательную диссертацию о проблеме продолжения эрмитово-позитивных функций[2] и без вести пропавший во время Второй мировой войны), М.С. Лившиц и В.П. Потапов — в Одессе, В.С. Азарин, В.П. Гурарий, М.И. Кадец, В.Э. Кацнельсон, Ю.И. Любич, В.И. Мацаев, В.Д. Мильман, И.В. Островский, Л.И. Ронкин — в Харькове, — вот далеко не полный их список [I.7]. У нескольких из них Б.Я. не был "официально утвержденным" научным руководителем, но сами они с полным правом считают себя его учениками, поскольку общение с ним и его идеи оказали глубокое влияние на их научную деятельность. Многие из учеников Б.Я. со временем изменили круг своих научных интересов, создали новые направления в анализе. Б.Я. всегда интересовался результатами своих учеников, гордился их достижениями и искренне радовался, видя, как его ученики выбирают "свою колею".

Широкую известность Б.Я. принесли его классические работы по теории целых функций и ее применениям. Его монография "Распределение корней целых функций", вышедшая в свет в 1956 году и подытожившая результаты 20-летней деятельности Б.Я., быстро стала настольной для многих аналитиков, и остается ею несмотря на полувековой возраст. Второе, дополненное издание было выпущено Американским математическим обществом в 1980 году. На мой взгляд, одна из самых увлекательных и ярких частей монографии Б.Я. — это семь коротких, глубоких Приложений, помещенных в конце книги и посвященных разнообразным применениям теории целых функций[3].

Его курс лекций "Целые функции", прочитанный в Московском государственном университете в 1969 году и изданный в Москве в 1971 году ротапринтным способом, моментально стал раритетом. В Харькове 70–80-х годов это издание, напоминавшее по внешнему виду "самиздат", можно было раздобыть лишь на одну–две ночи. В 1996 году Американское математическое общество издало расширенный вариант этих лекций, по-прежнему пользующийся успехом.

Научные интересы Б.Я. были весьма разнообразны. Помимо теории целых функций в кругу его интересов постоянно находились спектральная теория, почти периодические функции, гармонический и функциональный анализ. В каждой из этих областей Б.Я. принадлежат замечательные достижения. Но все же большая часть работ Б.Я. посвящена комплексному анализу. Для него это был мощный и эффективный аппарат, находящий многочисленные и разнообразные приложения в других областях математики. Продолжая традицию Винера и Карлемана, Б.Я. находил простые и зачастую неожиданные применения таким основным принципам комплексного анализа, как теоремы Фрагмена–Линделёфа и Винера–Пэли, интегральная формула Иенсена. В 40–50-х годах немногие аналитики владели этой техникой, и Б.Я. сделал очень многое для ее популяризации. Влияние Б.Я. можно обнаружить в работах Ахиезера и Крейна, во 2-м и 3-м томах монографии "Обобщенные функции"

[2] Его диссертация была опубликована много лет спустя [III.1].

[3] Во втором издании было добавлено Приложение VIII с обзором результатов о функциях вполне регулярного роста, полученных после выхода в свет первого издания.

Гельфанда и Шилова. В своем очерке [III.6], посвященном Линнику, И.А. Ибрагимов пишет о том, что в 50-х годах теорема Винера–Пэли была неизвестна ленинградским аналитикам, и Линнику о ней рассказал Б.Я.

Однажды в разговоре со мной Б.Я. высказал сожаление о том, что непропорционально большое число докладов на его семинаре посвящено “внутренним вопросам” теории целых функций и неванлинновской теории, зачастую весьма тонким, но оторванным от приложений. Без приложений, считал Б.Я., теория целых функций быстро утратит свою роль и зачахнет. Он высоко оценивал теорию гильбертовых пространств целых функций, построенную де Бранжем в начале 60-х годов, и работы М.В. Келдыша и В.И. Мацаева, в которых методы теории целых функций применялись к спектральной теории несамосопряженных операторов.

Сегодня, в начале XXI века, появились новые интересные приложения теории целых функций. Я упомяну лишь цикл работ[4] Бургейна, Гольдштейна и Шлага (см., например, [III.15]), посвященный локализации Андерсона для квазипериодических решетчатых потенциалов, в котором принципиальную роль играет матричнозначная версия классической леммы А. Картана об оценке снизу логарифма модуля полинома.

Возвращаясь к работам самого Б.Я., я хотел бы отметить его талант видеть простыми и ясными вещи, казавшиеся другим математикам сложными и непреодолимыми. Зачастую после бесед с Б.Я., его докладов, чтения его работ, возникало недоумение: а в чем, собственно, была трудность, и почему другие математики не могли ее преодолеть? Казалось, что там, где другие математики видели крепкую стену, в которой необходимо пробить брешь, Б.Я. видел открытую дверь. При этом Б.Я. владел искусной аналитической техникой и по мере необходимости пускал ее в ход.

Начав готовиться к этому докладу, я составил список работ Б.Я., о которых мне хотелось рассказать, говоря о его творческом наследии. Среди тем, которым были посвящены эти работы, были:

- целые функции вполне регулярного роста;
- аналитические почти периодические функции;
- теоремы единственности для функций с “редким спектром”;
- почти периодические функции на топологических группах;
- экстремальные свойства целых функций и операторы, сохраняющие неравенства;

[4] Спустя 13 лет после этого доклада, я добавлю сюда работы Гутмана и Цукамото [III.19] (см. также [III.20]) и Бургейна и Дятлова [III.16] (см. также [III.22]). Гутман и Цукамото нашли весьма неожиданное применение теории целых функций экспоненциального типа, ограниченных на вещественной оси, к классической задаче топологической динамики о погружении динамической системы в гильбертов куб с действующим на нем сдвигом. Бургейн и Дятлов применили найденную ими фрактальную версию известной теоремы Логвиненко–Середы к различным задачам квантового хаоса — ноябрь 2019.

- операторы преобразования, привязанные к ∞;
- чебышевские экстремальные задачи и конформные отображения на “гребёнки”;
- круг задач Вимана и Полиа;
- базисы Рисса из экспонент, целые функции типа синуса и интерполяция целыми функциями экспоненциального типа;
- субгармонические мажоранты и их приложения к теоремам единственности и полноты.

Составив этот список, я понял, что невозможно рассказать в часовом докладе даже о половине работ из него. Я расскажу лишь о двух работах Б.Я., в которых, на мой взгляд, наиболее характерным образом проявилось его умение находить неожиданно простые и красивые решения.

1. Интервал единственности для функций с редким спектром [II.3, Приложение II]

Рассмотрим класс $\mathfrak{F}(\Lambda)$, $\Lambda \subset \mathbb{R}$, функций на оси, представимых абсолютно сходящимся рядом экспонент

$$f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda e^{\mathrm{i}\lambda x}\,, \qquad \sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda| < \infty\,. \tag{1.1}$$

Обозначим через $n_\Lambda(t) = \#\Lambda \cap [-t,t]$ и положим

$$N_\Lambda(r) = \int_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

(для простоты будем предполагать, что Λ не содержит начала координат).

Теорема 1.1. *Если функция $f \in \mathfrak{F}(\Lambda)$ обращается в нуль на интервале длины d и*

$$\liminf_{r\to\infty} \left[N_\Lambda(r) - \frac{d}{\pi} r - \log r \right] = -\infty\,, \tag{1.2}$$

то $f \equiv 0$.

Эта теорема является обобщением того факта, что периодическая функция определяется своими значениями на интервале, длина которого равна периоду. Заметим, что Б.Я. рассматривает более общие, чем $\mathfrak{F}(\Lambda)$, классы почти периодических функций Степанова, но в этом более общем случае не возникает принципиально новых трудностей[5]. Для доказательства теоремы 1.1 Б.Я.

[5] Б.Я. пишет, что М.Г. Крейн обратил его внимание на связь между спектром функции и интервалом единственности в 1941 году и указывает на то, что близкие результаты были получены М.Г. Крейном в связи с теорией продолжения эрмитово-позитивных функций. По-видимому, работа М.Г. Крейна осталась неопубликованной.

рассматривает мероморфную функцию

$$\varphi(w) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{a_\lambda}{w-\lambda}$$

с простыми полюсами в точках множества Λ и замечает, что если функция f обращается в нуль на интервале $(-d/2, d/2)$ (общий случай, очевидно, сводится к этому), то всюду в комплексной плоскости

$$|\varphi(w)| \le \frac{M}{|\operatorname{Im} w|}\, e^{-\frac{1}{2}d|\operatorname{Im} w|}\,, \qquad M = \sup_{\mathbb{R}} |f|\,. \tag{1.3}$$

В самом деле, если, например, $\operatorname{Im} w < 0$, то

$$\varphi(w) = \mathrm{i}\int_0^\infty f(x)\, e^{-\mathrm{i}wx}\, \mathrm{d}x = \mathrm{i}\int_{d/2}^\infty f(x)\, e^{-\mathrm{i}wx}\, \mathrm{d}x\,,$$

откуда прямо следует оценка (1.3).

Согласно формуле Иенсена,

$$\int_0^r \frac{n(t,0)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^r \frac{n(t,\infty)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\varphi(re^{\mathrm{i}\theta})|\,\mathrm{d}\theta - \log|\varphi(0)|\,.$$

Здесь $n(t,0)$ и $n(t,\infty)$ — считающие функции нулей и полюсов функции φ (и мы для простоты предполагаем, что $\varphi(0)\ne 0$). Заметим, что $n(t,\infty) = n_\Lambda(t)$. Пренебрегая нулями функции φ и используя оценку (1.3), получаем

$$\int_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t}\,\mathrm{d}t \ge \frac{d}{r}\,t + \log r + O(1)\,,$$

что противоречит условию (1.2). Таким образом, $\varphi\equiv 0$, и тем самым теорема доказана. □

Следует отметить, что при существенно более жестком условии

$$\inf\{|\lambda-\lambda'|\colon\ \lambda\ne\lambda'\} > \frac{\pi}{d}$$

на спектр Λ заключение теоремы 1.1 вытекает из неравенства Ингхама [III.21, теорема 1], утверждающего, что для любой функции f класса $\mathfrak{F}(\Lambda)$ справедлива оценка

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda|^2 \le C(d,\Lambda)\int_I |f|^2\,,$$

где $I\subset\mathbb{R}$ — произвольный интервал длины $2d$.

Далее Б.Я. исследует точность этой теоремы и замечает, что “граничными функциями” являются ряды вида

$$f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{e^{\mathrm{i}\lambda x}}{C'(\lambda)}\,, \tag{1.4}$$

где $C(w)$ — целая функция экспоненциального типа d с простыми нулями в точках множества Λ и такая, что $1/C$ раскладывается в абсолютно сходящийся ряд простых дробей:

$$\frac{1}{C(w)} = \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{C'(\lambda)(w-\lambda)}\,, \qquad \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{1}{|C'(\lambda)|} < \infty\,. \tag{1.5}$$

Такие функции называются целыми функциями класса Крейна, и они (вместе с некоторыми родственными классами) играют важную роль в описании структуры неванлинновских матриц, связанных с неопределенными случаями проблемы моментов [III.2, гл. III, Приложения 11–12] и уравнения Штурма–Лиувилля на полуоси [III.8], равно как и в задачах весовой полноты полиномов и целых функций [III.17, теорема 66]. Само же условие

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{e^{i\lambda x}}{C'(\lambda)} = 0\,, \qquad -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}\,,$$

следует из представления (1.5) и означает, что мера $\mu = \sum_{\lambda\in\Lambda} \frac{\delta_\lambda}{C'(\lambda)}$ аннулирует систему экспонент $\{e^{i\lambda x} : -d/2 < x < d/2\}$.

В случае, когда коэффициенты a_λ ряда (1.1) вещественные, Б.Я. доказывает близкую теорему, учитывающую *знакоперемены* в последовательности коэффициентов a_λ. Для этого он выписывает в порядке возрастания элементы спектра Λ, лежащие в интервале $[-t,t]$:

$$\lambda_{-k'} < \lambda_{-k'+1} < \cdots < \lambda_{k-1} < \lambda_k,$$

полагает $a_j = a_{\lambda_j}$ и обозначает через $n_0(t)$ число перемен знака в последовательности

$$a_{-k'}, a_{-k'+1}, \ldots, a_{k-1}, a_k\,.$$

Б.Я. замечает, что если $a_j a_{j+1} > 0$, то мероморфная функция φ обращается в нуль на интервале $(\lambda_j, \lambda_{j+1})$, следовательно,

$$n(t,\infty) - n(t,0) \le n_0(t) + 1\,,$$

откуда, снова применяя формулу Иенсена, он заключает, что

$$\int_0^r \frac{n_0(t)}{t}\,\mathrm{d}t \ge \frac{d}{\pi} r - O(1)\,, \quad r \to \infty\,.$$

Затем Б.Я. переносит результат о знакопеременах на функции, представимые интегралами Фурье вещественнозначных мер ограниченной вариации, и доказывает теорему, устанавливающую точную оценку снизу для числа знакоперемен функции, имеющую спектральную лакуну заданного размера.

Эти результаты были получены Б.Я. в начале 40-х годов[6] и опубликованы в Докладах в 1950 году, а затем в [II.3, Приложение II]. Эта тема нашла

[6] См. запись в дневниках А.Н. Колмогорова от 15 октября 1943 года [III.7, стр. 72].

дальнейшее развитие в недавних работах А.Э. Еременко и Д. Новикова [III.18] и И.В. Островского и А.М. Улановского [III.25,III.26][7]. В этих работах можно найти дальнейшие ссылки.

2. Операторы, сохраняющие неравенства [II.2], [II.3, гл. IX]

Классическое неравенство С.Н. Бернштейна гласит, что если f — целая функция экспоненциального типа не выше σ и

$$|f(x)| \le M\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \tag{2.1}$$

то

$$|f'(x)| \le M\sigma\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,. \tag{2.2}$$

Иными словами, если f — целая функция экспоненциального типа не выше σ, то неравенство

$$|f(x)| \le |Me^{i\sigma x}|\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

можно продифференцировать! Известно много доказательств этого фундаментального факта. Подход, о котором пойдет речь ниже, был предложен Б.Я. в конце 40-х годов.

Начнем с алгебраической леммы, принадлежащей самому С.Н. Бернштейну. Обозначим через $\mathcal{H}$ класс полиномов с корнями в полуплоскости $\{\mathrm{Im}\, z \le 0\}$.

Лемма 2.1. *Пусть многочлен p удовлетворяет неравенству*

$$|p(x)| \le |\omega(x)|\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

где ω — многочлен класса $\mathcal{H}$. Тогда

$$|p'(x)| \le |\omega'(x)|\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Заметим, что по лемме Гаусса корни производных $\omega', \omega'', \ldots$ также лежат в замкнутой нижней полуплоскости. Поэтому заключение леммы можно итерировать:

$$|p''(x)| \le |\omega''(x)|, \ \ldots\ , |p^{(k)}(x)| \le |\omega^{(k)}(x)|\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Сперва я напомню, как Бернштейн доказывает эту лемму [III.4, гл. 3, § 1], а затем расскажу, как это делает Б.Я. Не уменьшая общности, будем предполагать, что многочлен ω не имеет вещественных корней.

Бернштейн доказывает неравенство $|p'(0)| \le |\omega'(0)|$, из которого сразу же следует и общий случай. Для этого среди всех многочленов $p(x) = p_0 + p_1 x + \cdots$ с фиксированным коэффициентом p_1 он ищет тот, для которого норма $\sup_{\mathbb{R}} |p/\omega|$ минимальна. Заметим, что $\deg p \le \deg \omega = n$ (в противном случае $\sup_{\mathbb{R}} |p/\omega| = +\infty$). Не уменьшая общности, можно считать, что p_1 —

[7] а также в появившихся после 2006 года работах М. Митковского и А. Полторацкого [III.23,III.24] и Н.М. Бланк и А.М. Улановского [III.13] — ноябрь 2019.

вещественное число, и что все коэффициенты экстремального многочлена $\widetilde{p}$ тоже вещественны. Бернштейн полагает $\omega = s + it$, где s и t — вещественные многочлены, временно фиксирует коэффициент p_0, и доказывает, что *экстремальный многочлен $\widetilde{p}$ имеет вид $\widetilde{p} = \alpha s + \beta t$, где параметры α и β выбраны так, что*

$$\alpha\, s(0) + \beta\, t(0) = p_0\,, \quad \alpha\, s'(0) + \beta\, t'(0) = p_1\,.$$

Для доказательства этого утверждения он полагает

$$f(x) = \frac{\alpha\, s(x) + \beta\, t(x)}{|\omega(x)|} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, \cos(\Phi(x) - \mu)\,,$$

где $\Phi(x) = \arg \omega(x)$, $\mu = \arg(\alpha + i\beta)$. Анализируя "фазу" $\Phi(x)$, Бернштейн проверяет, что *при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ функция $f(x)$ достигает своего максимального значения $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ с последовательно чередующимися знаками не менее $n = \deg \omega$ раз.*

Теперь нетрудно проверить, что многочлен $\widetilde{p} = \alpha s + \beta t$ действительно экстремальный. Предположим, что найдется вещественный многочлен p с $p(0) = p_0$, $p'(0) = p_1$, такой, что $\sup_{\mathbb{R}} |p/\omega| < \sup_{\mathbb{R}} |\widetilde{p}/\omega|$. Тогда многочлен $p - \widetilde{p}$ степени $\le n$ имеет корень кратности не меньше двух в начале координат и, согласно предыдущему замечанию, меняет знак еще в n точках максимального уклонения дроби f. Очевидно, что это невозможно.

Осталось вспомнить, что величина p_0 в нашем распоряжении. Таким образом, нам осталось минимизировать величину $\sup_{\mathbb{R}} |\widetilde{p}/\omega| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ при условии $\alpha\, s'(0) + \beta\, t'() = p_1$. После простых выкладок получаем

$$\frac{\alpha}{s'(0)} = \frac{\beta}{t'(0)} = \frac{p_1}{(s'(0))^2 + (t'(0))^2}$$

и

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \frac{|p_1|}{|\omega'(0)|} = \frac{|p'(0)|}{|\omega'(0)|}\,.$$

Таким образом, если $|p'(0)| = |\omega'(0)|$, то $\sup_{\mathbb{R}} |p/\omega| \ge 1$, что эквивалентно утверждению леммы. □

Затем Бернштейн распространяет это утверждение на случай целых функций экспоненциального типа. Это потребовало кропотливых рассуждений при доказательстве теоремы единственности для целых функций, обращающихся в нуль на множестве $\{x : \Phi(x) = k\pi + \mu\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$, что, в свою очередь, привело к дополнительным ограничениям на мажоранту ω [III.4, гл. 3, §§9–11]. Впоследствии эти ограничения были сняты Н.И. Ахиезером, с успехом применявшим подход С.Н. Бернштейна к разнообразным экстремальным задачам [III.3, Дополнения и Задачи, 56–60].

А вот как рассуждает Б.Я., доказывая утверждение, содержащее лемму 2.1. Обозначим $p^*(z) = \overline{p(\bar{z})}$ и начнем с простой леммы:

Лемма 2.2. *Пусть p, ω — многочлены, причем $\omega \in \mathcal{H}$. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

(a) $|p(x)| \le |\omega(x)|\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$

(b) $|p(z)| \le |\omega(z)|\,, \quad |p^*(z)| \le |\omega(z)|\,, \quad \operatorname{Im} z \ge 0\,.$

(c) $\lambda p + \omega \in \mathcal{H}\,, \quad |\lambda| < 1\,.$

Значение этой леммы состоит в том, что условие мажорации (a) она заменяет включением (c). Отметим, что условие (c) можно замкнуть: если многочлен $\lambda p + \omega$ не имеет корней в верхней полуплоскости при всех λ, $|\lambda| < 1$, то при любом λ, $|\lambda| = 1$, либо выполнено это же условие, либо $\lambda p + \omega$ — нулевой многочлен.

Доказательство леммы 2.2 совсем простое. Импликация (a) $\Longrightarrow$ (b) следует из принципа максимума, примененного к функциям p/ω и p^*/ω в верхней полуплоскости. Обратная импликация (b) $\Longrightarrow$ (a) очевидна. Импликация (b) $\Longrightarrow$ (c) тоже очевидна.

Чтобы доказать импликацию (c) $\Longrightarrow$ (a), зафиксируем z, $\operatorname{Im} z > 0$, и заметим, что условие

$$\lambda \frac{p(z)}{\omega(z)} + 1 \ne 0\,, \qquad |\lambda| < 1\,,$$

немедленно влечет, что $|p(z)/\omega(z)| < 1$. Поскольку z была произвольной точкой верхней полуплоскости, мы заключаем, что $|p(x)| \le |\omega(x)|$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Осталось дать подходящее определение.

Определение 2.3. Линейный оператор T, определенный на пространстве многочленов, называется допустимым, если он сохраняет класс $\mathcal{H}$.

Немедленно получаем

Следствие 2.4. *Пусть многочлен p удовлетворяет неравенству*

$$|p(x)| \le |\omega(x)|\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

где ω — многочлен класса $\mathcal{H}$. Тогда для любого допустимого оператора T справедливо

$$|(Tp)(x)| \le |(T\omega)(x)|\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Примеры допустимых операторов.

(A) По лемме Гаусса операторы $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, являются допустимыми, что немедленно влечет лемму 2.1.

(B) Нетрудно заметить, что если Q — многочлен с корнями в замкнутой верхней полуплоскости, то оператор $Q(\mathrm{d}/\mathrm{d}z)$ также является допустимым.

(C) Иной пример допустимых операторов дают “мультипликаторы Полиа–Шура” $\Gamma = (\gamma_k)_{k \ge 0}$, переводящие произвольный многочлен $p(z) = \sum_k p_k z^k$ с вещественными корнями в многочлен $(\Gamma p)(z) = \sum_k \gamma_k p_k z^k$ с вещественными корнями, см. [II.3, гл. VIII, § 3].

Б.Я. не приводит полного описания допустимых операторов, хотя, по-видимому, его можно извлечь из его результатов (см. [II.3, гл. IX] и предшествующие заметки в Докладах)[8].

Осталось перейти от многочленов к целым функциям. Через P^* Б.Я. обозначает замыкание многочленов класса $\mathcal{H}$ в топологии равномерной сходимости на каждом компакте в $\mathbb{C}$. Многие свойства многочленов класса $\mathcal{H}$ буквально переносятся на целые функции класса P^*. Например, если $\omega \in P^*$, то при $\operatorname{Im} z > 0$, $|\omega(z)| \le |\omega(\bar{z})|$, функция $y \mapsto |\omega(x + \mathrm{i}y)|$ возрастает при $y > 0$, функция ω'/ω имеет положительную мнимую часть в верхней полуплоскости, и ω' тоже принадлежит классу P^*. Классический результат, по существу принадлежащий Лагерру и Полиа, утверждает, что $\omega \in P^*$ в том и только том случае, если

$$\omega(z) = cz^M e^{-\gamma z^2 + \beta z} \prod_\nu \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right) e^{-z/z_\nu} \,,$$

где $\gamma \ge 0$, $\operatorname{Im} \beta \ge 0$, $\operatorname{Im} z_\nu \ge 0$, $\sum_\nu |z_\nu|^{-2} < \infty$, и $\sum_\nu |\operatorname{Im}(z_\nu^{-1})| < \infty$. Отметим, что функции класса P^* играют важную роль в де бранжевской теории гильбертовых пространств целых функций (в книге [III.17] класс P^* назван классом Полиа и обозначен через P).

Определение 2.5. Будем говорить, что целая функция $\omega \in P^*$ является P^*-мажорантой целой функции f, $f \prec \omega$, если

$$|f(z)| \le |\omega(z)| \,, \quad |f^*(z)| \le |\omega(z)| \,, \qquad \operatorname{Im} z \ge 0 \,, \tag{2.3}$$

где $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

Определение 2.6. Линейный оператор, определенный на линейной оболочке класса P^*, называется P^*-допустимым, если он сохраняет класс P^*.

Заметим, что если линейный оператор на пространстве многочленов является допустимым и непрерывным относительно равномерно непрерывной сходимости многочленов на компактах, то его можно расширить до P^*-допустимого оператора.

“Замыкая” вместе с Б.Я. следствие 2.4, получаем следующий результат:

Теорема 2.1. *Пусть $f \prec \omega$, и оператор T является P^*-допустимым. Тогда $Tf \prec T\omega$.*

В частности, если $f \prec \omega$, то и $f' \prec \omega'$.

Некоторым недостатком теоремы 2.1 является тот факт, что условие мажорирования (2.3) приходится проверять во всей комплексной плоскости. Поэтому Б.Я. вводит более узкий класс P, состоящий из целых функций экспоненциального (возможно, нулевого) типа, принадлежащих классу P^*. Используя принцип Фрагмена–Линделёфа, он устанавливает следующие леммы. Первая из них облегчает проверку условия $\omega \in P$:

[8] На этом пути описание допустимых операторов было найдено Борсеа и Бранденом [III.14]. Там же были решены несколько других, близких по духу задач — ноябрь 2019.

Лемма 2.7. *Для того, чтобы целая функция ω экспоненциального типа (возможно, нулевого) принадлежала классу P, необходимо и достаточно, чтобы ω не имела корней в нижней полуплоскости, и чтобы*

$$\limsup_{y\to+\infty} \frac{\log|\omega(\mathrm{i}y)|}{y} \le \limsup_{y\to+\infty} \frac{\log|\omega(-\mathrm{i}y)|}{y}\,.$$

Вторая лемма существенно упрощает проверку мажорации $f \prec \omega$ в случае, когда мажоранта ω принадлежит классу P:

Лемма 2.8. *Целая функция $\omega \in P$ является мажорантой целой функции f в том и только том случае, когда выполнены следующие два условия:*

(i) $|f(x)| \le |\omega(x)|, \quad x \in \mathbb{R}$;

(ii) *экспоненциальный тип функции f не превышает экспоненциальный тип функции ω.*

Благодаря этим двум леммам и обилию класса P-допустимых операторов, частный случай теоремы 2.1, относящийся к мажорантам класса P, стал в руках Б.Я. [II.2,II.4] и Н.И. Ахиезера [III.3, Дополнения 56–61, 67–70] эффективным средством доказательства разнообразных оценок целых функций экспоненциального типа, среди которых отметим обобщение классической теоремы Картрайт на случай целой функции экспоненциально типа, растущей на вещественной оси и имеющей мажоранту класса P лишь на последовательности точек.

В совместной работе [II.1] (см. также [III.3, Дополнения 62–66]) Н.И. Ахиезер и Б.Я. применили этот подход к (вообще говоря, многозначным) функциям аналитическим в плоскости с разрезами вдоль замкнутого подмножества $E \subset \mathbb{R}$, все точки которого предполагаются регулярными для решения задачи Дирихле в $\mathbb{C}\setminus E$. При этом роль мажоранты играет функция $\omega_E(z) = e^{-i\theta_E(z)}$, где θ_E — конформное отображение верхней полуплоскости на "гребёнчатую область", то есть на верхнюю полуплоскость с вертикальными разрезами, начинающимися на вещественной оси и идущими вверх. Впоследствии эта тема развивалась М.Б. Левиным [III.9], нашедшим аналог неравенства Бернштейна для граничных значений мероморфных функций в единичном круге, псевдопродолжимых через граничную окружность.

Отметим, что параллельно с работами Б.Я. теория мажорант по-своему развивалась и Н.Н. Мейманом [III.11, III.12], и что Е.А. Горин [III.5] нашел связь теории мажорант с задачами продолжения эрмитово-позитивных функций.

Список литературы

I. О Борисе Яковлевиче Левине

[I.1] Н.И. Ахиезер, Н.В. Ефимов, *Борис Яковлевич Левин (к пятидесятилетию со дня рождения)*, УМН **12**:2 (1957), 237–242.

[I.2] Н.В. Ефимов, М.Г. Крейн, И.В. Островский, *Борис Яковлевич Левин (к шестидесятилетию со дня рождения),* УМН **23**:5 (1968), 187–191.

[I.3] Н.И. Ахиезер, Н.В. Ефимов, М.Г. Крейн, М.А. Лаврентьев, В.А. Марченко, И.В. Островский, *Борис Яковлевич Левин (к семидесятилетию со дня рождения),* УМН **32**:5 (1977), 211–213.

[I.4] И.М. Гельфанд, М.Г. Крейн, В.А. Марченко, Н.К. Никольский, И.В. Островский, *Борис Яковлевич Левин (к восьмидесятилетию со дня рождения),* УМН **42**:4 (1987), 207–210.

[I.5] В.С. Азарин, А.А. Гольдберг, Е.А. Горин, В.А. Марченко, И.В. Островский, А.В. Погорелов, Л.И. Ронкин, М.Л. Содин, В.А. Ткаченко, *Борис Яковлевич Левин (некролог),* УМН **49**:1 (1994), 201–202.

[I.6] А.А. Гольдберг, *Б.Я. Левин — создатель теории целых функций вполне регулярного роста,* Матем. физ., анал., геом. **1** (1994), 186–192.

[I.7] И.В. Островский, М.Л. Содин, *Научная школа Б.Я. Левина,* Матем. физ., анал., геом. **10** (2003), 228–242.

[I.8] Yu. Lyubarskii, M. Sodin, V. Tkachenko, Preface in [II.6].

II. Работы Б.Я., цитировавшиеся в тексте

[II.1] Н.И. Ахиезер, Б.Я. Левин, *Обобщение неравенства С.Н. Бернштейна для производных от целых функций,* В кн. Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, ред. А.И. Маркушевич, Физматгиз, Москва, 1960, 111–165.

[II.2] Б.Я. Левин, *Об одном специальном классе целых функций,* Изв. АН СССР, сер. матем. **14** (1950), 45–84.

[II.3] Б.Я. Левин, *Распределение корней целых функций,* ГИТТЛ, Москва, 1956.

[II.3a] B.Ya. Levin, *Distributions of zeros of entire functions,* 2nd revised edition, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980.

[II.4] Б.Я. Левин, *Обобщение теоремы Картрайт о целой функции, ограниченной на последовательности точек,* Изв. АН СССР, сер. матем. **21** (1957), 549–558.

[II.5] Б.Я. Левин, *Воспоминания о Марке Григорьевиче Крейне,* Укр. мат. ж. **46** (1994), 305–309.

[II.6] B.Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions,* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

III. Работы других авторов

[III.1] А.П. Артеменко, *Эрмитово-положительные функции и позитивные функционалы, 1,* Теория функций, функциональный анализ и их приложения **41** (1984), 3–17; *2*, там же **42** (1984), 3–21.

[III.2] Н.И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов,* ГИФМЛ, Москва, 1961.

[III.3] Н.И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации,* Наука, Москва, 1965.

[III.4] С.Н. Бернштейн, *Экстремальные свойства полиномов,* ОНТИ, Москва–Ленинград, 1937.

[III.5] Е.А. Горин, *Неравенства Бернштейна с точки зрения теории операторов,* Вестник Харьковского ун-та **205** (1980), 77–105.

[III.5a] Е.А. Горин, *Лемма А. Картана по Б.Я. Левину с различными приложениями,* Журн. матем. физ., анал., геом. **3** (2007), 13–38.

[III.6] И.А. Ибрагимов, *Ю.В. Линник. Некоторые работы 50-х годов,* Алгебра и анализ **3**:3 (1991), 206–215.

[III.7] А.Н. Колмогоров, *Звуков сердца тихое эхо. Из дневников,* Физматгиз, Москва, 2003.

[III.8] М.Г. Крейн, *О неопределенном случае краевой задачи Штурма–Лиувилля в интервале* $(0,\infty)$, Изв. АН СССР, сер. матем. **14** (1952), 293–324.

[III.9] М.Б. Левин, *Оценка производной от мероморфной функции на границе области,* Теория функций, функцион. анал. и их прилож. **24** (1975), 68–85.

[III.10] В.А. Марченко, *Обобщенный сдвиг, операторы преобразования и обратные задачи,* В кн. Математические события XX века, Фазис, Москва, 2003.

[III.11] Н.Н. Мейман, *Дифференциальные неравенства и некоторые вопросы распределения нулей целых функций,* УМН **7**:3 (1952), 3–62.

[III.12] Н.Н. Мейман, *Принцип монотонности аргумента и дифференцирование неравенств,* ДАН СССР **120** (1958), 1191–1193.

[III.13] N. Blank, A. Ulanovskii, *Paley–Wiener functions with a generalized spectral gap,* J. Fourier Anal. Appl. **17** (2011), 899–915.

[III.14] J. Borcea, P. Branden, *Pólya–Schur master theorems for circular domains and their boundaries,* Ann. Math. **170** (2009), 465–492.

[III.15] J. Bourgain, *Green's Functions Estimates for Lattice Schrödinger Operators and Applications,* Princeton Univ. Press, Princeton, 2005.

[III.16] J. Bourgain, S. Dyatlov, *Spectral gaps without the presure condition,* Ann. Math. 187 (2018), 825–867.

[III.17] L. de Branges, *Hilbert Spaces of Entire Functions,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1968.

[III.18] A. Eremenko, D. Novikov, *Oscillation of Fourier integrals with a spectral gap,* J. Math. Pures Appl. **83** (2004), 313–365.

[III.19] Y. Gutman, M. Tsukamoto, *Embedding minimal dynamical systems into Hilbert cubes,* https://arxiv.org/abs/1511.01802.

[III.20] Y. Gutman, Y. Qiao, M. Tsukamoto, *Application of signal analysis to the embedding problem of* $\mathbb{Z}^k$*-actions,* Geom. Funct. Anal. **29** (2019), 1440–1502.

[III.21] A.E. Ingham, *Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series,* Math. Z. **42** (1936), 367–379.

[III.22] B. Jaye, M. Mitkovski, *Quantitative uniqueness properties for* L^2*-functions with fast decaying or sparsely supported Fourier transform,* https://arxiv.org/abs/1808.02149.

[III.23] M. Mitkovski, A. Poltoratskii, *Polya sequences, Toeplitz kernels and gap theorems,* Adv. Math. **224** (2010), 1057–1070.

[III.24] M. Mitkovski, A. Poltoratskii, *On the determinacy problem for measures*, Invent. Math. **202** (2015), 1241–1267.

[III.25] I.V. Ostrovskii, A. Ulanovskii, *On sign changes of tempered distributions having a spectral gap at the origin*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **336** (2003), 325–330.

[III.26] I.V. Ostrovskii, A. Ulanovskii, *On a problem of H. Shapiro*, J. Approx. Theory **126** (2004), 218–232.

M. Sodin,

School of Mathematical Sciences, Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel,

E-mail: sodin@tauex.tau.ac.il