Журнал математической физики, анализа, геометрии
2005, т. 1, № 1, с. 3–34

О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной

Е.П. Белан

Факультет математики и информатики
Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
ул. Вернадского, 4, Симферополь, 95036, Украина
E-mail:belan@tnu.crimea.ua

Статья поступила в редакцию 29 июня 2004 г.

Исследуется локальная динамика параболического уравнения на окружности с преобразованием сдвига пространственной переменной и малой диффузией. Установлено, что взаимодействие бегущих волн удовлетворяет принципу 1:2. Принцип максимума амплитуд справедлив с коэффициентом 2/3. Число устойчивых бегущих волн увеличивается, если коэффициент диффузии стремится к нулю.

Досліджується локальна динаміка параболічного рівняння на колі з перетворенням зсуву просторової змінної та малою дифузією. Встановлено, що взаємодія бігучих хвиль задовольняє принципу 1:2. Принцип максимуму амплітуд має місце з коефіцієнтом 2/3. Число стійких бігучих хвиль зростає, коли коефіцієнт дифузії прямує до нуля.

1. Введение

На окружности $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ рассмотрим модельное уравнение теории световых резонаторов с распределенной обратной связью [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + K(1 + \gamma \cos Qu), \tag{1}$$

где $\mu > 0$ — малый параметр. Здесь $u(\theta, t)$ — фаза световой волны, $Qu(\theta, t) = u(\theta + h, t)$, h — угол поворота поля в двумерной обратной связи, $K > 0$ — коэффициент, пропорциональный интенсивности светового потока, $0 < \gamma \leq 1$ — видность интерференционной картины.

Mathematics Subject Classification 2000: 35Q60, 35R10, 37L10.

В регулярном случае ($\mu = 1$) задача об автоколебаниях уравнения (1) на окружности рассматривалась в работах [2–5] (там же см. ссылки). Более общие регулярные случаи изучались в ряде работ, библиографию которых можно найти в работах [6–9]. Особый интерес к локальной динамике уравнения (1) при $\mu \ll 1$ вызван экспериментально обнаруженным [1] явлением распада структур (оптической турбулентности) при уменьшении коэффициента диффузии частиц нелинейной среды. Этот случай изучался в работах [2, 4, 10–12]. Как и в указанных работах, будем интересоваться вопросами о существовании, асимптотической форме и устойчивости решений типа бегущих волн уравнения (1), бифурцирующих при изменении K или h из пространственно однородных стационарных состояний. Отметим, что согласно полученным в работе [4] результатам имеет место мультистабильность бегущих волн в уравнении (1). Ниже доказывается, что в рассматриваемой задаче реализуется явление буферности, т.е. существование любого фиксированного числа экспоненциально орбитально устойчивых бегущих волн при подходящем выборе параметров. Анализу феномена буферности посвящен ряд работ, библиографию которых можно найти в [13–15].

Для исследования устойчивости бегущих волн уравнения (1) ниже развивается новый подход, в котором сочетаются метод Галеркина, асимптотический метод Крылова–Боголюбова–Митропольского, метод инвариантных многообразий [16–24]. Для определения характера устойчивости выделенной бегущей волны строится конечная совокупность сильно резонансных систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Каждая такая система инвариантна относительно группы вращений окружности и описывает конкурентное взаимодействие бегущей волны с упорядоченной парой возбужденных волн. Таким образом, характер устойчивости выделенной бегущей волны определяется в результате конкуренции с упорядоченными парами бегущих волн. Этот принцип соответствует общему представлению об определяющей роли механизма конкуренции структур в механизме установления той или иной структуры [25, 26]. Отметим, что этот подход применим и при $\mu = 0$. Тогда уравнение (1) вырождается в смешанное функционально-дифференциальное уравнение [27].

Бифурцирующие из стационарного состояния бегущие волны рассматриваемой задачи имеют гармоническую форму. Следуя [28], будем говорить, что топологический заряд бегущей волны равен N, если изменение ее фазы локальных колебаний при обходе окружности равно $2\pi N$.

Результаты работы изложены следующим образом. Во втором разделе приведены свойства полугруппы, порожденной уравнением (1) на S^1, в третьем — приведены бифуркационные условия. Асимптотические разложения бегущих волн на основе одночастотного метода получены в четвертом разделе. В пятом разделе получены условия устойчивости двух бегущих волн с наименьшими топологическими зарядами. Основные результаты работы о существовании, устойчивости и асимптотической форме бегущих волн содержатся в шестом разделе. В седьмом разделе найдены условия возникновения так называемой высокомодовой буферности и описан механизм ее реализации. В Заключении сформулированы особенности локальной динамики: принцип взаимодействия бегущих волн и принцип максимума амплитуды.

В недавно вышедшей работе А.Ю. Колесова, Н.Х. Розова [37] рассмотрены вопросы о существовании и устойчивости решений типа бегущих волн уравнения (1). В этой работе установлено, что в уравнении (1) реализуется феномен буферности.

И в Заключении подчеркнем основные результаты настоящей работы. В этой связи отметим, что асимптотические формы бегущих волн уравнения (1) были получены в работе [4]. Независимо и иным методом указанные формы построены в работе автора [10]. Следует отметить, что полученное в этой работе условие устойчивости бегущих волн является лишь необходимым. Заметим, что в работе [4] анализ устойчивости бегущих волн в полном объеме не проводился. Критерий устойчивости бегущих волн впервые получен А.Ю. Колесовым, Н.Х. Розовым [37]. Отличный от него по форме критерий устойчивости бегущих волн, полученный в настоящей работе, связан с новым подходом по исследованию динамики бегущих волн параболических уравнений с малой диффузией. Новый метод привел и к новым результатам по динамике бегущих волн уравнения (1), позволившим дополнить картину возникновения оптической буферности из [37] новыми характеристиками. Эти характеристики в концентрированной форме отражены в заключительной части работы в принципе 1:2 взаимодействия бегущих волн и принципе максимума амплитуды.

2. Свойства полугруппы. Инерциальные многообразия

Рассмотрим свойства полугруппы, порожденной уравнением (1) на S^1. Введем с этой целью пространства функций, измеримых на S^1. Обозначим H гильбертово пространство $L_2(S^1)$ со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\theta)v(\theta)\,d\theta.$$

Обозначим $H^l = H^l(S^1)$, $l \in \mathbb{Z}_+$, пространство Соболева. Скалярное произведение в H^l определяется формулой

$$\langle u, v\rangle_l = \sum_{k=0}^{l}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u^{(k)}(\theta)v^{(k)}(\theta)\,d\theta.$$

В пространстве H норму обозначим $\|\cdot\|$. Норму в пространстве H^l будем обозначать $\|\cdot\|_l$. Пусть H^{-1} — пространство, сопряженное H^1; норма в этом пространстве вводится стандартно:

$$\|u\|_{-1} = \sup\{\langle u, v\rangle / \|v\|_1 \quad (v \in H^1, v \neq 0)\}.$$

Пусть $\mathfrak{B}$ — банахово пространство. Обозначим $C(\mathfrak{B})$ банахово пространство непрерывных и ограниченных на вещественной оси функций со значениями в пространстве $\mathfrak{B}$ с нормой $\|f\|_{C(\mathfrak{B})} = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|_{\mathfrak{B}}$. Обозначим $M^2(\mathfrak{B})$ банахово пространство измеримых функций $f : R \to \mathfrak{B}$ с нормой

$$\|f\|^2_{M^2(\mathfrak{B})} = \sup_{t\in R} \int\limits_0^1 \|u(t+s)\|^2_{\mathfrak{B}}\, ds.$$

Введем пространство $U = C(H) \cap M^2(H^1)$ с нормой

$$\|f\|_U = \|f\|_{C(H)} + \|f\|_{M^2(H^1)}.$$

Рассмотрим теперь свойства отображений, определяющих правую часть уравнения (1). Заметим, что линейный оператор $Q : H \to H$, $Q : H^1 \to H^1$ ограничен, причем $\|Q\|_{\mathrm{Hom}(H)} = 1$, $\|Q\|_{\mathrm{Hom}(H^1)} = 1$. Согласно [8] отображение $F : v \to \cos(Qv)$ из U в $M^2(H^{-1})$ дифференцируемо по Фреше в каждой точке пространства U. Отсюда следует, что отображение $F : v \to \cos(Qv)$ из H^1 в H^{-1} дифференцируемо по Фреше.

Пусть $T > 0$. Следуя [29], можно убедиться, что уравнение (1) на S^1 с начальным условием $u\big|_{t=0} = u_0$, $u_0 \in H$, имеет единственное решение $u(\mu)$ такое, что $u(\mu) \in L_\infty(H) \cap L_2(H^1)$ при $\mu > 0$, $u(0) \in L_\infty(H)$ (здесь $L_p(B) = L_p([0,T], B)$).

Обозначим $\{S^\mu_t\}$ семейство полугрупп, порожденное семейством уравнений (1) на S^1. Полугруппа $\{S^\mu_t\}$ при $\mu > 0$ обладает свойствами, сформулированными в теореме 4 главы 1 монографии [29]. Отметим, что $\{S^\mu_t\}$, $\mu \geq 0$, в пространстве H имеет поглощающее множество [8]:

$$\{u \in H : \|u\| \leqslant K(1+\gamma) + 1\}.$$

Группу вращений окружности обозначим G. Положим

$$\Lambda^k_G = \{T_g : H^k \to H^k, \quad T_g u(\theta) = u(\theta + g), \quad g \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}, \quad k = -1, 0, 1, \dots .$$

Здесь $H^0 = H$. Очевидно, Λ^k_G, $k = 0, 1, \dots$, является представлением компактной группы G как группы унитарных операторов в пространствах соответственно H^k, $k = 0, 1, \dots$. Представлением G как группы изометрических операторов в пространстве H^{-1} является Λ_G^{-1}. Уравнение (1) на S^1, в котором оператор $d^2/d\theta^2 = \Delta$ рассматривается как оператор из пространства $\mathrm{Hom}(H^1, H^{-1})$, является G-эквивариантным.

Используя методы, развитые в теории инерциальных многообразий (см., напр., [30–32]), можно убедиться в существовании постоянной L такой, что, если

$$\mu(2N+1) > L,$$

то уравнение (1) в пространстве H^1 имеет N-мерное инерциальное многообразие. При фиксированном $\mu > 0$ и соответствующем выборе N можно добиться выполнения этого неравенства. Итак, возникает принципиальная возможность свести исследование предельных режимов исходной задачи к решению аналогичной задачи для некоторой совокупности обыкновенных дифференциальных уравнений. С точки зрения локальной динамики бегущих волн в данной работе задача построения аппроксимирующей системы дифференциальных уравнений конструктивно решена путем ее сведения к легко реализуемому построению совокупности шестимерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Развитый в настоящей работе формализм исследования устойчивости бегущих волн может быть обоснован исходя из свойства притяжения инерциальных многообразий. Так как в данной работе для этой цели используется иной подход, то на доказательстве существования инерциальных многообразий уравнения (1) в пространстве H^1 и его свойствах мы не останавливаемся.

3. Основные предположения

Рассмотрим вопрос о выборе подходящего пространственно-однородного состояния равновесия уравнения (1), определяемого из уравнения

$$w = K(1 + \gamma \cos w), \tag{2}$$

которое колебательным образом теряет устойчивость при изменении K. С этой целью фиксируем какую-либо непрерывную ветвь решений

$$w = w(K), \quad 1 + K\gamma \sin w(K) \neq 0 \tag{3}$$

уравнения (2). Затем линеаризуем уравнение (1) на состоянии равновесия (3) и применяем к полученному на S^1 уравнению

$$\dot{u} = \mu \Delta u - u + \Lambda(K) Q u,$$

где $\Lambda(K) = -K\gamma \sin w(K)$, метод Фурье по системе функций $\exp(im\theta)$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. В результате убеждаемся, что спектр устойчивости рассматриваемого состояния равновесия состоит из собственных значений

$$-1 - \mu m^2 + \Lambda(K) \exp(imh), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Согласно (3) либо $\Lambda(K) > -1$, либо $\Lambda(K) < -1$. Если $\Lambda(K) \in (-1,1)$, то $w = w(K)$ — экспоненциально устойчивое стационарное решение (1) для любого $\mu > 0$. Если же $\Lambda(K) > 1$, то оно, очевидно, неустойчиво. При $\Lambda(K) = -1$ изменение устойчивости носит апериодический характер. В этой связи, следуя [1, 4], далее рассматривается случай

$$\Lambda(K) < -1.$$

Остановимся на выборе величины h. Очевидно, что при иррациональном отношении $2\pi/h$ спектр устойчивости любого состояния равновесия при $m \to \infty$, $\mu \to 0$ фактически меняется непрерывно. В этой связи будем предполагать, что

$$h = 2\pi p/q, \tag{4}$$

где натуральные числа p, q взаимно просты, а $q \geq 3$ — нечетное. Тогда среди натуральных $k = 1, \ldots, q-1$ найдутся ровно два значения $m^+ < m^-$, $m^+ + m^- = q$ такие, что

$$\min_{0 \leqslant k \leqslant q} \cos(kh) = \cos(m^\pm h). \tag{5}$$

Теперь осуществим выбор бифуркационного значения параметра K из условия

$$-1 + \Lambda(K)\cos(m^+ h) = 0. \tag{6}$$

Задача реализуемости этого условия с исчерпывающей полнотой исследована в работе [37]. Согласно полученным в указанной работе результатам существует счетная последовательность $\widehat{K}_r, r = 1, 2, \ldots$, корней уравнения (6) такая, что $\widehat{K}_r \to \infty$ при $r \to \infty$, причем

$$\Lambda'(\widehat{K}_r) < 0.$$

Выберем некоторое $\widehat{K}_r$ и с целью упрощения записи нижний индекс опустим. Ясно, что существует аналитическая функция $\kappa(\nu)$, $\kappa(0) = 0$, определенная в окрестности нуля и такая, что

$$\Lambda(\widehat{K} + \kappa) = \widehat{\Lambda} - \nu. \tag{7}$$

Здесь $\widehat{\Lambda} = \Lambda(\widehat{K})$.

Выполним теперь в уравнении (1) преобразование сдвига

$$u = v + w(\nu),$$

где $w(\nu) = w(\widehat{K} + \kappa(\nu))$, и представим полученное уравнение в виде

$$\dot{v} = \mathfrak{L}(\mu, \nu)v + \mathfrak{R}(Qv, \nu). \tag{8}$$

В силу (7)

$$\mathfrak{L}(\mu,\nu)v = \mu\Delta v - v + (\widehat{\Lambda} - \nu)Qv,$$
$$\mathfrak{R}(v,\nu) = (\widehat{K} + \kappa(\nu))\gamma[\cos(w(\nu) + v) - \cos w(\nu) + v\sin w(\nu)]. \qquad (9)$$

Очевидно,

$$\mathfrak{L}(\mu,\nu)\exp(im\theta) = \lambda_m(\mu,\nu)\exp(im\theta), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где

$$\lambda_m(\mu,\nu) = -1 - \mu m^2 + (\widehat{\Lambda} - \nu)\exp(imh) \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \qquad (10)$$

В рассматриваемом случае реализуется критический случай устойчивости бесконечной размерности. Действительно, согласно (4)–(6) и определению $\widehat{K}$

$$\lambda_{s^{\pm}}(\mu,\nu) \to \pm i\omega_0, \quad \mu \to 0,\ \nu \to 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad \omega_0 = \widehat{\Lambda}\sin m^{+}h \neq 0. \qquad (11)$$

Здесь $s^{\pm} = m^{\pm} + sq$, $s = 0, 1, 2, \dots$. В силу (4)–(6), (10)

$$\operatorname{Re}\lambda_{\mathrm{s}^{\pm}}(\mu,\nu) = -\mu(\mathrm{m}^{\pm} + \mathrm{sq})^2 - \widehat{\Lambda}^{-1}\nu.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re}\lambda_{0^{+}}(\mu,\nu) > \operatorname{Re}\lambda_{0^{-}}(\mu,\nu) > \operatorname{Re}\lambda_{1^{+}}(\mu,\nu) > \dots, \quad \mu > 0. \qquad (12)$$

Эти неравенства имеют важное значение в задаче об устойчивости бегущих волн уравнения (8). Заметим, что

$$\operatorname{Re}\lambda_{\mathrm{s}^{\pm}}(0,\nu) = -\widehat{\Lambda}^{-1}\nu, \quad \mathrm{s} = 0, 1, 2, \dots . \qquad (13)$$

4. Асимптотическое разложение бегущих волн

В качестве фазового пространства уравнения (8) примем пространство H.

Для построения решений уравнения (8) типа бегущих волн воспользуемся одночастотным методом [16, 17, 20]. Различие фазовых скоростей бегущих волн $\exp\left(i(\omega_0 t + (m^{\pm} + sq)\theta)\right)$, $s = 0, 1, \dots$, позволяет применить этот метод. Будем искать указанные решения уравнения (8) в виде

$$v = \sum_{k=1}^{\infty}\sigma_k(z\exp\left(i(m^{+} + sq)\theta\right), \overline{z}\exp\left(-i(m^{+} + sq)\theta\right), \mu, \nu). \qquad (14)$$

Здесь $\sigma_1(z,\overline{z},\mu,\nu) = z + \overline{z}$, $\sigma_k(z,\overline{z},\mu,\nu)$, $k = 2, 3, \dots$, — форма k-й степени относительно $z, \overline{z}$, а переменная z удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = z(\lambda_{s^{+}} + c_1|z|^2 + c_2|z|^4 + \dots), \qquad (15)$$

где $c_k = c_k(\mu,\nu)$, $k = 1, 2, \dots$. Переменная $\overline{z}$ удовлетворяет соответствующему комплексно-сопряженному уравнению. Подставим (14), (15) в уравнение (8). Выполнив затем замену $z \exp{(i(m^+ + sq)\theta)} \to z$ и приравняв формы второй, третьей, ... степени относительно $z, \overline{z}$ в левой и правой частях полученного равенства, имеем рекуррентную последовательность линейных неоднородных уравнений

$$B_1(\mu,\nu)\sigma_k = f_k(z,\overline{z},\mu,\nu), \quad k = 2, 3 \dots . \tag{16}$$

Несложный анализ приводит к заключению, что оператор $B_1(\mu,\nu)$, определенный на пространстве многочленов относительно $z, \overline{z}$, является диагональным оператором, причем имеют место следующие равенства:

$$B_1(0,0)z^\alpha \overline{z}^\beta = (i\omega_0(\alpha-\beta) - \lambda_m(0,0))z^\alpha \overline{z}^\beta, \tag{17}$$

где $m = (\alpha - \beta)m^+$. Так как в силу (9)

$$f_2(z,\overline{z},0,0) = -\frac{1}{2}\widehat{K}\gamma \cos\widehat{w}(z\exp{(im^+h)} + \overline{z}\exp{(-im^+h)})^2,$$

то из уравнения (16) при $k = 2$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ находим $\sigma_2 = \sigma_2(z,\overline{z},0,0)$:

$$\sigma_2 = \frac{\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}}{2}(b\exp{(im^+h)}z^2 + \text{к.с.} + 2(1-\widehat{\Lambda})^{-1}z\overline{z}), \tag{18}$$

где

$$b = (2i\omega_0 + 1 - \widehat{\Lambda}\exp{(2im^+h)})^{-1}, \tag{19}$$

а к.с. — это стандартное обозначение комплексно-сопряженного выражения. Согласно (17) для разрешимости уравнения (16) при $k = 3$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при $z^2\overline{z}$, $z\overline{z}^2$ в его правой части были равны нулю. Из этого условия находим

$$c_1(0,0) = c = \frac{1}{2}\exp{(im^+h)}\big(-\widehat{\Lambda} + (\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w})^2(2(1-\widehat{\Lambda})^{-1} + \exp{(2im^+h)}b)\big). \tag{20}$$

Затем находим σ_3 из уравнения (16) при $k = 3$, $\mu = 0$, $\nu = 0$ в той же форме, что и его правая часть. Заметим, что уравнение (16) при $k = 2$ имеет решение $\sigma_2 = \sigma_2(\cdot,\mu,\nu)$, аналитическое по μ,ν в окрестности нуля. Из уравнения (16) при $k = 3$ определяем $c_1(\mu,\nu)$ и $\sigma_3(\cdot,\mu,\nu)$. Эти функции являются аналитическими функциями μ,ν в окрестности нуля. Отметим, что процесс последовательного построения $c_k(\mu,\nu)$, $\sigma_k(\cdot,\mu,\nu)$ в пространстве аналитических по μ,ν в окрестности нуля функций неограниченно продолжим.

Формальные разложения (14), (15) позволяют построить приближенные разложения. Следуя [16, 20], в качестве первого приближения примем

$$v = \sum_{k=1}^{2}\sigma_k(z\exp{(i(m^+ + sq)\theta)}, \overline{z}\exp{(-i(m^+ + sq)\theta)}, 0, 0), \tag{21}$$

в котором переменная z удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = z(\lambda_{s+} + c|z|^2). \tag{22}$$

В качестве второго приближения примем

$$v = \sum_{k=1}^{3} \sigma_k(z \exp(i(m^+ + sq)\theta), \overline{z} \exp(-i(m^+ + sq)\theta), \mu, \nu), \tag{23}$$

в котором переменная z удовлетворяет уравнению

$$\dot{z} = z(\lambda_{s+} + c_1(\mu,\nu)|z|^2 + c_2(0,0)|z|^4). \tag{24}$$

На этом пути можно построить приближенные разложения любого порядка.

Рассмотрим теперь вопрос о периодических решениях уравнений (22), (24). Бифуркационный анализ этих уравнений опирается на следующую лемму.

Лемма. $\mathrm{Re}\, c < 0$.

Доказательство. Согласно (20) достаточно установить неравенство

$$\mathrm{Re}\,(\exp(3\mathrm{i}m^+\mathrm{h})(2\mathrm{i}\omega_0 + 1 - \widehat{\Lambda}\exp(2\mathrm{i}m^+\mathrm{h}))^{-1}) \le 0. \tag{25}$$

В этой связи, учитывая вытекающее из (6) и (10) равенство

$$\widehat{\Lambda}\exp(im^+h) = 1 + i\omega_0,$$

убеждаемся, что (25) эквивалентно условию

$$(\widehat{\Lambda} - 1)(\widehat{\Lambda} + 2)(-2\widehat{\Lambda}^2 + \widehat{\Lambda} + 2) > 0.$$

Последнее справедливо, т.к. $\widehat{\Lambda} \in (-1, -2)$. Лемма доказана.

Доказанная лемма позволяет решить вопрос о бифурцирующих из нуля периодических решениях уравнений (22), (24). Рассмотрим в этой связи двупараметрическое семейство уравнений (22). Ясно, что при $\mathrm{Re}\,\lambda_{s+}(\mu,\nu) > 0$ уравнение (22) имеет периодическое решение

$$z = \rho_{s+}^{1/2} \exp(i\hat{\omega}_{s+}t), \tag{26}$$

где

$$\rho_{s+} = \frac{\mathrm{Re}\,\lambda_{s+}(\mu,\nu)}{-\mathrm{Re}\,c}, \quad \hat{\omega}_{s+} = \mathrm{Im}\,\lambda_{s+}(\mu,\nu) + \mathrm{Im}\,c\rho_{s+}(\mu,\nu). \tag{27}$$

Следовательно, в силу (18), (21) уравнение (8) имеет приближенное по невязке порядка $\|(\mu,\nu)\|^{3/2}$ периодическое по t решение

$$\widehat{v}_{s+} = \rho_{s+}^{1/2} 2\cos\eta + \widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}\rho_{s+}((1-\widehat{\Lambda})^{-1} + \mathrm{Re}\,(\mathrm{b}\exp\left(2\mathrm{i}(\eta + \mathrm{m}^{+}\mathrm{h})\right))), \qquad (28)$$

где

$$\eta = \hat{\omega}_{s+}(\mu,\nu)t + (m^{+} + sq)\theta.$$

Рассмотрим теперь уравнение (24). Это уравнение при $\rho_{s+}(\mu,\nu) > 0$ имеет периодическое решение вида (26) с амплитудой, представимой в виде $\rho_{s+}^{1/2}(\mu,\nu) + O(\rho_{s+}(\mu,\nu))$. Подставим это решение в (23). В результате получим приближенное по невязке порядка $\|(\mu,\nu)\|^{5/2}$ решение уравнения (8) вида

$$\rho_{s+}^{1/2} 2\cos\eta + \rho_{s+}p_2(\eta) + \rho_{s+}^{3/2}p_3(\eta).$$

Здесь $p_2(\eta)$, $p_3(\eta)$ — 2π-периодические функции η,

$$\eta = (\omega_0 + q_1\rho_{s+} + q_2\rho_{s+}^2)t + (m^{+} + sq)\theta,$$

где q_1, q_2 — постоянные. Рассуждая так и далее и переходя затем к пределу, получим разложение

$$\rho_{s+}^{1/2}(\mu,\nu) 2\cos\eta + \sum_{k=2}^{\infty} \rho_{s+}^{k/2}(\mu,\nu)p_k(\eta,\mu,\nu), \qquad (29)$$

где $p_k(\eta,\mu,\nu)$, $k = 2, 3, \dots$, — 2π-периодичны по η и вещественно-аналитичны по μ,ν в окрестности нуля, а η определяется равенством

$$\eta = \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{q}_k(\mu,\nu)\rho_{s+}^{k}(\mu,\nu), \qquad (30)$$

где $\hat{q}_k(\mu,\nu)$, $k = 1, 2, \dots$, — вещественно-аналитические функции μ,ν в окрестности нуля. Согласно полученным далее результатам ряд (29), в котором η удовлетворяет равенству (30), асимптотически сходится при $\rho_{s+} \to 0$, $\nu \to 0$ к периодическому по t решению уравнения (8).

Аналогично строятся приближенные, периодические по t решения уравнения (8) с топологическим зарядом $m^{-} + sq$. Отметим, что решение $\widehat{v}_{s-}$ можно получить из $\widehat{v}_{s+}$ заменой s^{+} на s^{-}, c на $\overline{c}$. Наши построения применимы и в случае $\mu = 0$. Для получения приближенных решений типа бегущих волн следует положить в полученных выше формулах $\mu = 0$.

5. Устойчивость приближенных решений $\widehat{v}_{0+}$, $\widehat{v}_{0-}$

Рассмотрим вопрос об устойчивости приближенных решений $\widehat{v}_{0+}$, $\widehat{v}_{0-}$ уравнения (8) в области $\operatorname{Re}\lambda_{2+}(\mu,\nu) < 0$. С этой целью модернизируем метод Галеркина [25], [33] исследования устойчивости так, чтобы аппроксимирующая система была G-эквивариантной. В соответствии с многочастотным методом, формализмом построения центральных многообразий G-эквивариантных систем будем искать приближенные решения уравнения (8) в виде

$$v = \sum_{k=1}^{3} \sigma_k(z_1 \exp(i(m^+)\theta), z_2 \exp(i(m^-)\theta),$$
$$z_3 \exp(i(m^+ + q)\theta), z_4 \exp(i(m^- + q)\theta), \text{к.с.}), \tag{31}$$

где $\sigma_1(z,\overline{z}) = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + \text{к.с.}$, $\sigma_2(z,\overline{z})$, $\sigma_3(z,\overline{z})$ — формы относительно $z,\overline{z}$, $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, соответственно второй, третьей степени, а переменная z_k, $k = 1,2,3,4$, удовлетворяет уравнению

$$\dot{z}_k = \hat{\lambda}_k(\mu,\nu) z_k + a_k(z,\overline{z}), \quad k = 1,2,3,4. \tag{32}$$

Здесь $\hat{\lambda}_1 = \lambda_{0+}$, $\hat{\lambda}_2 = \lambda_{0-}$, $\hat{\lambda}_3 = \lambda_{1+}$, $\hat{\lambda}_4 = \lambda_{1-}$, а $a_k(z,\overline{z})$, $k = 1,2,3,4$, — формы третьей степени относительно $z,\overline{z}$. Уравнения относительно комплексно-сопряженных переменных, как обычно, опущены. Мы осуществим выбор форм $a_k(z,\overline{z})$, $k = 1,2,3,4$, согласно условий

$$a_k(z,\overline{z}) \exp(im(k)\theta) = a_k(z \exp(im(\cdot)\theta), \overline{z} \exp(-im(\cdot)\theta)),\ k = 1,2,3,4, \tag{33}$$

где $m(1) = m^+$, $m(2) = m^-$, $m(3) = m^+ + q$, $m(4) = m^- + q$, $z \exp(im(\cdot)\theta) = (z_1 \exp(i(m^+)\theta), z_2 \exp(i(m^-)\theta), z_3 \exp(i(m^+ + q)\theta), z_4 \exp(i(m^- + q)\theta))$. Подставим (31), (32) в уравнение (8). Затем, после замены $z \exp(im(\cdot)\theta) \to z$, приравняем формы соответственно второй, третьей степени в левой и правой частях полученного равенства. В результате при $\mu = 0$, $\nu = 0$ получим следующее уравнение относительно σ_2:

$$B_2 \sigma_2 = \frac{\widehat{\Lambda} \operatorname{ctg} \widehat{w}}{2} ((z_1 + z_3) \exp(im^+ h)) + (z_2 + z_4) \exp(im^- h) + \text{к.с.})^2. \tag{34}$$

Несложный анализ приводит к заключению, что B_2 — диагональный оператор, определенный на пространстве многочленов относительно $z,\overline{z}$, и, кроме того, имеют место равенства

$$B_2 z^\alpha \overline{z}^\beta = (i\omega_0(\alpha - \beta, e_1) - \lambda_m(0,0)) z^\alpha \overline{z}^\beta, \tag{35}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ — целочисленные векторы с неотрицательными компонентами, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} z_3^{\alpha_3} z_4^{\alpha_4}$, $m = (\alpha-\beta, e_1)m^+ + (\alpha-\beta, e_2)q$,

$e_1 = (1,-1,1,-1)$, $e_2 = (0,1,1,2)$, $(a,b) = \sum\limits_1^4 a_k b_k$. Согласно (35) уравнение (34) имеет решение того же вида, что и его свободный член.

Рассмотрим теперь уравнение относительно σ_3:

$$B_2\sigma_3 = f_3(z,\overline{z}). \tag{36}$$

Приравняем нулю коэффициенты в правой части этого уравнения при мономах $z^\alpha\overline{z}^\beta$ таких, что $i\omega_0(\alpha-\beta,e_1) - \lambda_m(0,0) = 0$, где m принимает значения m^+, m^-, $m^+ + q$, $m^- + q$. В результате однозначно находим формы a_k, $k = 1,2,3,4$, удовлетворяющие условию (33). Согласно методу Галеркина опустим в правой части уравнения (36) оставшиеся резонансные мономы, т.е. мономы $z^\alpha\overline{z}^\beta$ такие, что $(\alpha-\beta,e_1)^2 = 1$. Получившееся в результате уравнение имеет решение того же вида, что и его свободный член. Итак, поставленная выше задача разрешима в восьмимодовой аппроксимации Галеркина.

Подставим полученные выражения для a_k, $k = 1,2,3,4$, в систему (32). В результате получим резонансную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_1(\lambda_{0^+} + c(|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_3|^2 + 2|z_4|^2)) + c\overline{z_2}^2 z_4,\\
\dot{z}_2 &= z_2(\lambda_{0^-} + \overline{c}(2|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2 + 2|z_4|^2)) + \overline{cz_1}^2 z_3,\\
\dot{z}_3 &= z_3(\lambda_{1^+} + c(2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + |z_3|^2 + 2|z_4|^2)) + c{z_1}^2 z_2,\\
\dot{z}_4 &= z_4(\lambda_{1^-} + \overline{c}(2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_3|^2 + |z_4|^2)) + \overline{c}z_1 z_2^2.
\end{aligned} \tag{37}$$

Эта система инвариантна относительно группы преобразований

$$\{z_k \to \exp\left((-1)^{k+1} ig\right) z_k, \quad k = 1,2,3,4, \quad g \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\},$$

которая является унитарным представлением в пространстве $\mathbb{C}^4$ группы вращений окружности.

Исследуем теперь устойчивость периодического решения

$$\varphi_{0^+}(t,\mu,\nu) = \rho_{0^+}^{1/2}(\exp(i\hat{\omega}_{0^+}t), \exp(-i\hat{\omega}_{0^+}t), 0, \ldots, 0)^T$$

системы (37). С этой целью линеаризуем ее на данном периодическом решении. Полученная в результате система приводится очевидным образом к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, матрица коэффициентов которой является блочно-диагональной. Одним из ее блоков является матрица

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{Re}\,\lambda_{0^+} + i\mathrm{Im}\,c\rho_{0^+} & -\mathrm{Re}\,\lambda_{0^+} + i\mathrm{Im}\,c\rho_{0^+} \\ -\mathrm{Re}\,\lambda_{0^+} - i\mathrm{Im}\,c\rho_{0^+} & -\mathrm{Re}\,\lambda_{0^+} - i\mathrm{Im}\,c\rho_{0^+} \end{pmatrix},$$

собственными значениями которой являются 0 и $-2\mathrm{Re}\,\lambda_{0+}$. Блоками указанной матрицы являются матрицы $A_{0+,0-} = A_{0+,0-}(\mu,\nu)$, $\overline{A}_{0+,0-}$, где

$$A_{0+,0-} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda_{0-} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} - i\mathrm{Im}\,c\rho_{0+} & \overline{c}\rho_{0+} \\ c\rho_{0+} & \mathrm{Re}\,\lambda_{1+} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} + i\mathrm{Im}\,c\rho_{0+} \end{pmatrix},$$

а ее одномерными блоками — $\mathrm{Re}\,\lambda_{1-} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} - 2\mathrm{i}\mathrm{Im}\,c\rho_{0+}$ и ей комплексно-сопряженная величина. Несложный анализ приводит к заключению, что устойчивость решения φ_{0+} определяется матрицей $A_{0+,0-}$. Анализ устойчивости этой матрицы приводит к вопросу об устойчивости многочлена четвертой степени с вещественными коэффициентами. Его устойчивость определяется следующими величинами:

$$\begin{aligned} a_{0+,0-} &= 4\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} - \mathrm{Re}\,\lambda_{0-} - \mathrm{Re}\,\lambda_{1+}, \\ b_{0+,0-} &= (2\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} - \mathrm{Re}\,\lambda_{0-})(2\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} - \mathrm{Re}\,\lambda_{1+}) - \mathrm{Re}\,\lambda_{0+}^2, \\ \beta_{0+,0-} &= \chi\mathrm{Re}\,\lambda_{0+}(\mathrm{Re}\,\lambda_{0-} - \mathrm{Re}\,\lambda_{1+}), \end{aligned}$$

где $\chi = \frac{\mathrm{Im}\,c}{-\mathrm{Re}\,c}$. Согласно критерию Рауса–Гурвица для устойчивости матрицы $A_{0+,0-}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$d_{0+,0-} = a_{0+,0-}^2 b_{0+,0-} - b_{0+,0-}^2 - 2\beta_{0+,0-}^2 > 0.$$

Отсюда следует, что бифурцирующее из нуля периодическое решение φ_{0+} системы (37) является экспоненциально орбитально устойчивым.

Устойчивость периодического решения

$$\varphi_{0-}(t,\mu,\nu) = \rho_{0-}^{1/2}(0,0,\exp(i\hat{\omega}_{0-}t),\exp(-i\hat{\omega}_{0-}t),0,\dots,0)^T$$

системы (37) определяется матрицей

$$A_{0-,0+} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda_{0+} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{0-} + i\mathrm{Im}\,c\rho_{0-} & c\rho_{0-} \\ \overline{c}\rho_{0-} & \mathrm{Re}\,\lambda_{1-} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{0-} - i\mathrm{Im}\,c\rho_{0-} \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} a_{0-,0+} &= 4\mathrm{Re}\,\lambda_{0-} - \mathrm{Re}\,\lambda_{0+} - \mathrm{Re}\,\lambda_{1-}, \\ b_{0-,0+} &= (2\mathrm{Re}\,\lambda_{0-} - \mathrm{Re}\,\lambda_{0+})(2\mathrm{Re}\,\lambda_{0-} - \mathrm{Re}\,\lambda_{1-}) - \mathrm{Re}\,\lambda_{0-}^2, \\ \beta_{0-,0+} &= \chi\mathrm{Re}\,\lambda_{0-}(\mathrm{Re}\,\lambda_{0+} - \mathrm{Re}\,\lambda_{1-}). \end{aligned}$$

Рассуждая, как и выше, приходим к заключению, что периодическое решение φ_{0-} устойчиво тогда и только тогда, когда

$$d_{0-,0+} = a_{0-,0+}^2 b_{0-,0+} - b_{0-,0+}^2 - \beta_{0-,0+}^2 > 0.$$

Согласно (12) отсюда следует, что решение φ_{0^-} рождается неустойчивым. Решение φ_{0^-} обретает устойчивость тогда, когда величина $\mathrm{Re}\,\lambda_{0^-}$ достигнет при $\mu/\nu = (\mu/\nu)_{0^-}$ некоторого критического значения. Ясно, что необходимым условием устойчивости решения φ_{0^-} является условие $2\mathrm{Re}\,\lambda_{0^-} - \mathrm{Re}\,\lambda_{0^+} > 0$, $b_{0^-,0^+} > 0$.

Рассмотрим теперь случай $\mu = 0$. В силу (13) $b_{0^+,0^-}(0,\nu) = b_{0^-,0^+}(0,\nu) = 0$. Таким образом, периодические решения φ_{0^+}, φ_{0^-} системы (37), рождаясь одновременно при переходе через критическое значение $\nu = 0$, неустойчивы.

Отметим интересную особенность динамики периодических решений φ_{0^+}, φ_{0^-} системы (37). Легко видеть, что переменная z_4 фактически не влияет на характер устойчивости периодического решения φ_{0^+} системы (37) и с указанной точки зрения можно положить ее равной нулю, понизив тем самым размерность системы на два порядка. Ясно, что переменная z_3 не влияет на характер устойчивости периодического решения φ_{0^-}. Из дальнейшего следует, что эта особенность динамики периодических решений не случайна.

Согласно изложенному и полученным в следующем разделе результатам имеет место экспоненциальная устойчивость приближенного решения $\hat{v}_{0^+}$ уравнения (8). Для устойчивости приближенного решения $\hat{v}_{0^-}$ необходимо и достаточно, чтобы матрица $A_{0^-,0^+}$ была устойчивой.

6. Основной результат

Рассмотрим вопрос об устойчивости бегущей волны $\hat{v}_{k^+}$ в связи с взаимодействием с бегущей волной $\hat{v}_{s^-}$. Построим с этой целью приближенные решения уравнения (8) в виде

$$v = \sum_{k=1}^{3} \sigma_k(z_1 \exp{(ik^+\theta)}, z_2 \exp{(is^-\theta)}, z_3 \exp{(il^+\theta)}, \text{к.с}), \tag{38}$$

где $\sigma_1(z,\overline{z}) = z_1 + z_2 + z_3 + \text{к.с}$, $l = 2k + s + 1$, а $\sigma_2(z,\overline{z})$, $\sigma_3(z,\overline{z})$ — формы соответственно второй, третьей степени относительно $z, \overline{z}$, $z = (z_1, z_2, z_3)$. Рассуждая, как и выше, получаем G-эквивариантную резонансную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_1(\lambda_{k^+} + c(|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_3|^2)),\\
\dot{z}_2 &= z_2(\lambda_{s^-} + \overline{c}(2|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2)) + \overline{c z_1}^2 z_3,\\
\dot{z}_3 &= z_3(\lambda_{l^+} + c(2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + |z_3|^2)) + c z_1{}^2 z_2.
\end{aligned} \tag{39}$$

Следуя проведенному выше анализу, приходим к заключению, что устойчивость периодического решения

$$\varphi_{k^+}(t,\mu,\nu) = \rho_{k^+}^{\frac{1}{2}}(\exp{(i\hat{\omega}_{k^+}t)}, \exp{(-i\hat{\omega}_{k^+}t)}, 0, \ldots, 0)^T$$

этой системы определяется матрицей

$$A_{k^+,s^-} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda_{s^-} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} - i\mathrm{Im}\,c\rho_{k^+} & \overline{c}\rho_{k^+} \\ c\rho_{k^+} & \mathrm{Re}\,\lambda_{l^+} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} + i\mathrm{Im}\,c\rho_{k^+} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости бегущей волны $\hat{v}_{k^+}$ в связи со взаимодействием с бегущей волной $\hat{v}_{s^+}$. Построим с этой целью приближенные решения уравнения (8) в виде

$$v = \sum_{k=1}^{3} \sigma_k(z_1 \exp(ik^+\theta), z_2 \exp(is^+\theta), z_3 \exp(in^+\theta), \text{к.с.}), \tag{41}$$

где $\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3 + \text{к.с.}$, $n = 2k - s$, $0 \le s < k$, а $\sigma_2(z, \overline{z})$, $\sigma_3(z, \overline{z})$ удовлетворяют тем же требованиям, что и в рассмотренном выше случае. При этом переменные z_k, $k = 1, 2, 3$, удовлетворяют резонансной системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1(\lambda_{k^+} + c(|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_3|^2)), \\ \dot{z}_2 &= z_2(\lambda_{s^+} + c(2|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_3|^2)) + c{z_1}^2\overline{z}_3, \\ \dot{z}_3 &= z_3(\lambda_{n^+} + c(2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + |z_3|^2)) + c{z_1}^2\overline{z}_2. \end{aligned} \tag{42}$$

Характер устойчивости периодического решения

$$\rho_{k^+}^{\frac{1}{2}}(\exp(i\hat{\omega}_{k^+}t), \exp(-i\hat{\omega}_{k^+}t), 0, \dots, 0)^T$$

системы (42) определяется матрицей

$$A_{k^+,s^+} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda_{s^+} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} - i\mathrm{Im}\,c\rho_{k^+} & \overline{c}\rho_{k^+} \\ c\rho_{k^+} & \mathrm{Re}\,\lambda_{n^+} - 2\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} + i\mathrm{Im}\,c\rho_{k^+} \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Итак, взаимодействие бегущей волны $\hat{v}_{k^+}$ с бегущими волнами $\hat{v}_{s^+}$, $\hat{v}_{(2k-s)^+}$, $0 \le s < k$, описывается системой дифференциальных уравнений (42). При этом характер устойчивости бегущей волны $\hat{v}_{k^+}$ в связи с указанным взаимодействием определяется матрицей A_{k^+,s^+}.

Обоснование изложенной процедуры исследования устойчивости приближенного решения $\hat{v}_{k^+}(\eta, \mu, \nu)$ уравнения (8), определенного в области

$$\mathfrak{D}_{k^+} = \{(\mu, \nu) : \mu > 0, \nu > 0, \mathrm{Re}\,\lambda_{k^+}(\mu, \nu) > 0\},$$

дает следующая теорема.

Теорема 1. *Существует* $\delta_0 > 0$, $\delta_0 = \delta_0(k)$, *что для всех* $(\mu,\nu) \in \mathfrak{D}_{k+}$ *таких, что* $\|(\mu,\nu)\| < \delta_0$, *уравнение* (8) *имеет периодическое по* t *решение* $v_{k+}(\eta,\mu,\nu)$, $\eta = \omega_{k+}(\mu,\nu)t + (m^+ + kq)\theta$, *где*

$$v_{k+} = \rho_{k+}^{1/2} 2\cos\eta + \widehat{\Lambda}\,\mathrm{ctg}\,\widehat{w}\rho_{k+}((1-\widehat{\Lambda})^{-1} + \mathrm{Re}\,(\mathrm{b}\exp\,(2\mathrm{i}(\eta + \mathrm{m^+h})))) + \mathrm{o}(\mu,\nu).$$

Здесь

$$\rho_{k+} = \frac{\mathrm{Re}\,\lambda_{\mathrm{k+}}(\mu,\nu)}{-\mathrm{Re}\,\mathrm{c}} + o(\|\mu,\nu\|), \quad \omega_{k+}(\mu,\nu) = \mathrm{Im}\,\lambda_{\mathrm{k+}}(\mu,\nu) + \mathrm{Im}\,\mathrm{c}\rho_{\mathrm{k+}} + \mathrm{o}(\|\mu,\nu\|),$$

а b *удовлетворяет равенству* (19).

Решение $v_{k+}(\mu,\nu)$ *— экспоненциально орбитально устойчиво тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

i) для любого $s \ge 0$ *матрица* $A_{k+,s^-}(\mu,\nu)$ *устойчива;*

ii) для любого $0 \le s < k$ *матрица* $A_{k+,s^+}(\mu,\nu)$ *устойчива.*

Доказательство. Центральный момент доказательства теоремы состоит в исследовании свойств устойчивости в пространстве H уравнения

$$\dot{\xi} = \mathfrak{L}(\mu,\nu)\xi + \frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{R}(Q\hat{v}_{k+},\nu)Q\xi, \tag{44}$$

полученного линеаризацией уравнения (8) на приближенном решении $\hat{v}_{k+}$. Введем в пространстве H ортопроектор P:

$$P\xi = \sum_{-k_0}^{k_0} P_s\xi, \quad P_s\xi = \xi_s \exp\,(is\theta), \quad \xi_s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi \exp\,(-is\theta)\,d\theta,$$

где выбор k_0 осуществим позже. Воспользуемся представлением $\xi = h + w$, $h = P\xi$, $w = (I-P)v$, где I — единичный оператор. В полученной относительно h, w системе уравнений положим $w = 0$. В результате получим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\dot{h}_n = \lambda_n h_n + P_n \frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{R}(Q\hat{v}_{k+},\nu)Q\sum_{-k_0}^{k_0} h_s \exp\,(is\theta), \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots. \tag{45}$$

Здесь $h_{-n} = \overline{h}_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, эта система является $2k_0 + 1$ модовой галеркинской аппроксимацией уравнения (44).

Для исследования устойчивости этой системы воспользуемся принципом сведения. В системе (45) будем различать критические и некритические переменные. Выделим из (45) уравнения относительно критических переменных. Используя равенство

$$\frac{\partial\mathfrak{R}(u,0)}{\partial u} = \widehat{\Lambda}\,\mathrm{ctg}(\widehat{w})u - \frac{1}{2}\widehat{\Lambda}u^2 + o(u^2),$$

получим

$$\begin{aligned}\dot{h}_{l^+} &= \lambda_{l^+}h_{l^+} + \rho_{k^+}^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}(\exp\left(i(\hat{\omega}_{k^+}t+m^+h)\right)h_{(l-k)q}\\ &\quad+\exp\left(-i(\hat{\omega}_{k^+}t+m^+h)\right)h_{2m^++(l+k)q})\\ &\quad+\rho_{k^+}((\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w})^2(1-\widehat{\Lambda})^{-1}\exp\left(im^+h\right)h_{l^+}\\ &\quad+(-\widehat{\Lambda}/2+(\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w})^2b\exp\left(2im^+h\right)\exp\left(i(2\hat{\omega}_{k^+}t+m^+h)\right)h_{(l-2k-1)^-})+\dots,\end{aligned} \tag{46}$$

где $l\geq 0$, $m^++lq\leq k_0$, $2m^++(l+k)q\leq k_0$. Здесь многоточие означает члены порядка ρ_{k^+}, содержащие некритические переменные, и слагаемые порядка $\rho_{k^+}^{3/2}$. Точно так же имеем

$$\begin{aligned}\dot{h}_{l^-} &= \lambda_{l^-}h_{l^-} + \rho_{k^+}^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}(\exp\left(i(\hat{\omega}_{k^+}t+m^+h)\right)h_{m^--m^++(l-k)q}\\ &+\exp\left(-i(\hat{\omega}_{k^+}t+m^+h)\right)h_{(l+k+1)q})\\ &+\rho_{k^+}((\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w})^2(1-\widehat{\Lambda})^{-1}\exp\left(-im^+h\right)h_{l^-}\\ &+(-\widehat{\Lambda}/2+(\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w})^2\overline{b}\exp\left(-2im^+h\right)\exp\left(-i(2\hat{\omega}_{k^+}t+m^+h)\right)h_{(2k+l+1)^+})+\dots,\end{aligned} \tag{47}$$

где $l\geq 0$, $m^-+lq\leq k_0$, $2m^++(l+k)q\leq k_0$, а многоточие имеет тот же смысл, что и выше. Заметим, что если $l\geq 0$, $m^-+lq\leq k_0$, но $2m^++(l+k)q>k_0$, то в правой части уравнения (46) следует опустить слагаемое, пропорциональное $h_{2m^++(l+k)q}$. Аналогично поступаем и со слагаемым в правой части уравнения (47), пропорциональным $h_{(2k+l+1)q}$, если $(2k+l+1)q>k_0$. Уравнения относительно $h_{-l^+}=\overline{h}_{l^+}$, $h_{-l^-}=\overline{h}_{l^-}$, $l\geq 0$, получаются соответственно из уравнений (46), (47) операцией комплексного сопряжения.

В соответсвии с правыми частями уравнений (46), (47) выделим из системы (45) только те уравнения относительно некритических переменных, которые существенны для определения ее устойчивости. Ими являются

$$\begin{aligned}&\dot{h}_{sq}=\lambda_{sq}h_{sq}+\rho_{k^+}^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}(\exp\left(i\hat{\omega}_{k^+}t\right)h_{(s-k-1)^-}+\exp\left(-i\hat{\omega}_{k^+}t\right)h_{(s+k)^+})+\dots,\\ &\dot{h}_{2m^++sq}=\lambda_{2m^++sq}h_{2m^++sq}+\rho_{k^+}^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}\exp\left(i(\hat{\omega}_{k^+}t+2m^+h)\right)h_{(s-k)^+}+\dots,\\ &\dot{h}_{m^--m^++sq}=\lambda_{m^--m^++sq}h_{m^--m^++sq}+\rho_{k^+}^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}\exp\left(i\hat{\omega}_{k^+}t\right)h_{(s+k)^+}\dots,\end{aligned}$$

где многоточие означает члены порядка $\rho_{k^+}^{1/2}$, содержащие некритические переменные, и слагаемые порядка ρ_{k^+}.

Выполним теперь в системе (45) преобразование

$$\begin{aligned}&h_{l^+}\to h_{l^+}-\rho_{k^+}^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}(\exp\left(i(\hat{\omega}_{k^+}t+m^+h)\right)h_{(l-k)q}\\ &\qquad+b\exp\left(i(-\hat{\omega}_{k^+}t+m^+h)\right)h_{2m^++(l-k)q}),\quad 2m^++(l+k+1)q\leq k_0,\\ &h_{l^-}\to h_{l^-}-\rho_{k^+}^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}(\exp\left(-i(\hat{\omega}_{k^+}t+m^+h)\right)h_{(l+k+1)q}\\ &\qquad+b\exp\left(i(\hat{\omega}_{k^+}t+m^+h)\right)h_{m^--m^++(l-k)q}),\quad (l+k+1)q\leq k_0.\end{aligned}$$

Если $2m^+ + (l+k)q > k_0$, то в этом преобразовании опустим слагаемые, содержащие $h_{2m^+ + (l+k)q}$. Аналогично поступим со слагаемым, пропорциональным $h_{(2k+l+1)q}$, если $(2k+l+1)q > k_0$. В результате получим систему относительно критических переменных, которая членами $o(\rho_{k^+})$ отличается от системы

$$
\begin{aligned}
\dot{h}_{l^+} &= (\lambda_{l^+} + 2c\rho_{k^+})h_{l^+} + c\rho_{k^+} \exp{(2i\hat{\omega}_{k^+}t)} h_{(l-2k-1)^-},\\
\dot{h}_{l^-} &= (\lambda_{l^-} + 2\overline{c}\rho_{k^+})h_{l^+} + \overline{c}\rho_{k^+} \exp{(-2i\hat{\omega}_{k^+}t)} h_{(l+2k+1)^+}, \quad (l+2k+1)^+ \le k_0,\\
\dot{h}_{l^-} &= (\lambda_{l^-} + 2\overline{c}\rho_{k^+})h_{l^+}, \quad (l+2k+1)^+ > k_0.
\end{aligned}
$$

Ясно, что эта система с точностью $o(\rho_{k^+})$ представляет систему (45) на критическом инвариантном многообразии. В этой системе выполним замену

$$
h_{l^+} \to \exp{(i\hat{\omega}_{k^+}t)} h_{l^+}, \quad h_{l^-} \to \exp{(-i\hat{\omega}_{k^+}t)} h_{l^-}.
$$

В результате получим систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
\dot{h}_{l^+} &= (\lambda_{l^+} + 2c\rho_{k^+} - i\hat{\omega}_{k^+})h_{l^+} + c\rho_{k^+} h_{(l-2k-1)^-},\\
\dot{h}_{l^-} &= (\lambda_{l^-} + 2\overline{c}\rho_{k^+} + i\hat{\omega}_{k^+})h_{l^-} + \overline{c}\rho_{k^+} h_{(l+2k+1)^+}, \quad (l+2k+1)^+ \le k_0,\\
\dot{h}_{l^+} &= (\lambda_{l^+} + 2c\rho_{k^+} + i\hat{\omega}_{k^+})h_{l^+}, \quad (l+2k+1)^+ > k_0.
\end{aligned}
$$

Матрица коэффициентов A^{k^+} этой системы — блочно-диагональна и состоит из двумерных и одномерных блоков. Ее двумерные блоки:

a) A_{k^+,s^-}, $\overline{A}_{k^+,s^-}$, $m^+ + (2k+s+1)q \le k_0$;

b) A_{k^+,s^+}, $\overline{A}_{k^+,s^+}$, $0 \le s < k$;

$$
\begin{pmatrix} -\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} + i\mathrm{Im}\,\mathrm{c}\rho_{\mathrm{k}^+} & -\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} + i\mathrm{Im}\,\mathrm{c}\rho_{\mathrm{k}^+} \\ -\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} - i\mathrm{Im}\,\mathrm{c}\rho_{\mathrm{k}^+} & -\mathrm{Re}\,\lambda_{k^+} - i\mathrm{Im}\,\mathrm{c}\rho_{\mathrm{k}^+} \end{pmatrix}.
$$

Здесь матрицы A_{k^+,s^-}, A_{k^+,s^+} определены согласно равенств (40), (43). Одномерными блоками матрицы A^{k^+} являются $\lambda_{l^+} + 2c\rho_{k^+} + i\hat{\omega}_{k^+}$, $(l+2k+1)^+ > k_0$, и им коплексно сопряженные величины. Следовательно, при фиксированных $\mu > 0$, $\nu > 0$ найдется такое $k_0 = k_0(\mu,\nu)$, что $\mathrm{Re}\,(\lambda_{\mathrm{l}^+} + 2\mathrm{c}\rho_{\mathrm{k}^+}) < 0$ для l, удовлетворяющих неравенству $(l+2k+1)^+ > k_0$. Итак, устойчивость системы (45) определяется матрицами A_{k^+,s^-}, $s \ge 0$, $m^+ + (2k+s+1)q \le k_0$, A_{k^+,s^+}, $0 \le s < k$. Следуя [34], приходим к заключению, что экспоненциальная орбитальная устойчивость приближенного решения $\hat{v}_{k^+}$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия i), ii) теоремы.

Перейдем теперь к вопросу о существовании решения v_{k^+} уравнения (8) типа бегущей волны. Положим в (8) $v = y(\tau,\mu,\nu) = y(\omega t + (m^+ + kq)\theta, \mu, \nu)$. В результате для определения 2π-периодического решения $y(\tau,\mu,\nu)$ и $\omega =$

$\omega_{k+}(\mu,\nu)$ имеем сингулярно возмущенное дифференциально-разностное уравнение

$$\omega y'(\tau)=\mu(m^{+}+kq)^{2}y''(\tau)-y(\tau)+(\widehat{\Lambda}-\nu)y(\tau+m^{+}h)+\mathfrak{R}(y(\tau+m^{+}h),\nu). \quad (48)$$

Согласно (28) это уравнение при $\omega=\hat{\omega}_{k+}$ имеет приближенное по невязке порядка $\rho_{k+}^{3/2}$, 2π-периодическое решение $\hat{y}(\tau)=\hat{y}(\tau,\mu,\nu)$, где

$$\hat{y}(\tau)=\rho_{k+}^{1/2}2\cos(\tau)+\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}\rho_{k+}((1-\widehat{\Lambda})^{-1}+\mathrm{Re}\,\mathrm{b}\exp(2\mathrm{i}(\tau+\mathrm{m}^{+}\mathrm{h})).$$

Из рассуждений в четвертом разделе следует, что можно построить приближенные 2π-периодические решения уравнения (48) с любой наперед заданной точностью при соответствующем выборе ω. Следуя [34], [35], покажем, что существование приближенных 2π-периодических решений влечет существование 2π-периодического решения уравнения (48). Линеаризованное на $\hat{y}(\tau)$ уравнение запишем в виде

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(\mu,\nu)z&=\hat{\omega}_{k+}z'(\tau)-\mu(m^{+}+kq)^{2}z''(\tau)-z(\tau)+(\widehat{\Lambda}-\nu)z(\tau+m^{+}h)\\&+(\rho^{1/2}g_{1}(\tau)+\rho g_{2}(\tau)+\rho^{3/2}g_{3}(\tau,\mu,\nu))z(\tau+m^{+}h)=0,\end{aligned}$$

где $\rho=\rho_{k+}(\mu,\nu)$,

$$\begin{aligned}g_{1}(\tau)&=-\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}(\exp(i(\tau+m^{+}h))+\exp(-i(\tau+m^{+}h)),\\g_{2}(\tau)&=\frac{1}{2}\widehat{\Lambda}(\exp(i(\tau+m^{+}h))+\exp(-i(\tau+m^{+}h)))^{2}\\&-(\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w})^{2}((1-\widehat{\Lambda})^{-1}+\frac{b}{2}\exp(2i(\tau+m^{+}h))+\frac{\overline{b}}{2}\exp(-2i(\tau+m^{+}h))),\end{aligned}$$

а функция $g_{3}(\tau,\mu,\nu)$ — 2π-периодична по τ, непрерывно дифференцируема по τ и непрерывна по (μ,ν) при $0\le\mu<\mu_{0}$, $0<\nu<\nu_{0}$. Замена

$$y=\hat{y}(\tau)+z$$

приводит уравнение (48) к виду

$$\mathfrak{B}(\mu,\nu)z=F(\tau,z,z',\mu,\nu,\delta), \quad (49)$$

где

$$F(\tau,z,z',\mu,\nu,\delta)=\delta(z'(\tau)+\hat{y}'(\tau))+f(\tau,z,\mu,\nu),\quad \delta=\hat{\omega}_{k+}-\omega.$$

Здесь

$$f(\tau,z,\mu,\nu)=f_{0}(\tau,\mu,\nu)+f_{2}(\tau,z,\mu,\nu),$$

где 2π-периодическая функция f_0 такова, что

$$\|f_0(\cdot,\mu,\nu)\|_H < d\rho^{3/2}(\mu,\nu),$$

а функция $f_2(\tau,\cdot,\mu,\nu) : H^1 \to H$, $f_2(\tau,0,\mu,\nu) = 0$ удовлетворяет условию

$$\|f_2(\cdot,z_1,\mu,\nu) - f_2(\cdot,z_2,\mu,\nu)\|_H < d\max(\|z_1\|_{H^1}, \|z_2\|_{H^1})\|z_1 - z_2\|_H \tag{50}$$

для всех $\|z_k\|_{H^1} < d\rho$, $k = 1,2$. Здесь и далее одной буквой d будем обозначать положительные постоянные, которые не зависят от μ,ν и точные значения которых несущественны.

Нам понадобится информация о разрешимости в пространстве H^2 уравнения

$$\mathfrak{B}(\mu,\nu)z = g, \quad g \in H. \tag{51}$$

Предположим, что $z \in H^2$ удовлетворяет этому уравнению. Умножим его левую и правую части скалярно на z. Используя затем интегрирование по частям и неравенство Гельдера, получим априорную оценку

$$\|z\|_{H^1} < d(\|z\|_H + \|g\|_H).$$

Действуя аналогично, получим неравенство

$$(m^+ + kq)^2\mu\|z\|_{H^2} < d(\|z\|_H + \|g\|_H).$$

Дальнейший анализ задачи (51) опирается на свойства спектральной задачи

$$\mathfrak{B}(\mu,\nu)z = \lambda z, \quad z \in H. \tag{52}$$

Рассмотрим ее как возмущение задачи

$$\hat{\omega}_{k^+}z'(\tau) - \mu(m^+ + kq)^2 z''(\tau) - z(\tau) - (\widehat{\Lambda} - \nu)z(\tau + m^+h) = \lambda z, \quad z \in H.$$

Ясно, что эта задача имеет полную, ортонормированную в H систему собственных функций 1, $\exp(ik\tau)$, $k = \pm1, \pm2, \ldots$. Собственным функциям $\exp(i\tau)$, $\exp(-i\tau)$ соответствуют комплексно-сопряженные собственные значения, стремящиеся к нулю при $\mu \to 0$, $\nu \to 0$. Все остальные собственные значения при малых μ,ν являются простыми и равномерно отделены от нуля. В этой связи достаточно ограничиться исследованием задачи (52) для λ из окрестности нуля. Так как $\rho^{-1/2}\hat{y}'(\tau)$ — приближенное решение (52) при $\lambda = 0$, то можно воспользоваться следующей методикой [36]. Положим

$$z = \beta_1 \exp(i\tau) + \beta_2 \exp(-i\tau) + z_2(\tau,\mu,\nu) + z_3(\tau,\mu,\nu) + \ldots,$$
$$\lambda = \lambda_1(\mu,\nu) + \lambda_2(\mu,\nu) + \ldots$$

и подставим эти равенства в (52). Затем приравняем слагаемые в левой и правой частях полученного равенства одного порядка малости. В результате относительно z_2 получим уравнение

$$\mathfrak{B}(0,0)z_2 = -\rho^{1/2}g_1(\tau)(\beta_1 \exp(i(\tau+m^+h)) + \beta_2 \exp(-i(\tau+m^+h))),$$

которому удовлетворяет функция

$$\begin{aligned} z_2 &= \widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{w}(b\beta_1 \exp(2i(\tau+m^+h)) \\ &+ \overline{b}\beta_2 \exp(-2i(\tau+m^+h)) + (1-\widehat{\Lambda})^{-1}(\beta_1+\beta_2)). \end{aligned}$$

Уравнение

$$\mathfrak{B}(0,0)z_3 = G_3(\tau,\mu,\nu)$$

разрешимо тогда и только тогда, когда функция G_3 ортогональна $\exp(i\tau)$, $\exp(-i\tau)$. Отсюда следует, что $(\beta_1,\beta_2)^T$ — собственный вектор матрицы

$$\rho S = \rho\begin{pmatrix} c & c \\ \overline{c} & \overline{c} \end{pmatrix},$$

а λ_1 — соответствующее собственное значение. Очевидно, собственным векторам $(1,-1)^T$, $(c,\overline{c})^T$ этой матрицы отвечают соответственно собственные значения 0, $2\rho\mathrm{Re}\,\mathrm{c}$. Итак,

$$\begin{aligned} z^1(\tau,\mu,\nu) &= \mathrm{Re}\,(\mathrm{c}\exp(\mathrm{i}\tau)) + \rho^{1/2}\widehat{\Lambda}\operatorname{ctg}\widehat{\mathrm{w}}((1-\widehat{\Lambda})^{-1} \\ &+ \mathrm{Re}\,(\mathrm{c}\exp(2\mathrm{i}(\tau+\mathrm{m}^+\mathrm{h})))) + \mathrm{O}(\rho) \end{aligned} \tag{53}$$

— собственная функция оператора $\mathfrak{B}(\mu,\nu)$, соответствующая собственному значению $2\rho\mathrm{Re}\,\mathrm{c}+\mathrm{O}(\rho^2)$. Нулевому с точностью $O(\rho^2)$ собственному значению отвечает собственная функция $\rho^{-1/2}(\hat{y}'(\tau)+O(\rho))$. Из условия разрешимости уравнения

$$S\beta = \alpha$$

заключаем, что $\mathrm{Im}\,(\mathrm{c}\exp(\mathrm{i}\tau)) + \mathrm{O}(\rho^{1/2})$ — собственная функция оператора, сопряженного к оператору $\mathfrak{B}(\mu,\nu)$, и нулевым с точностью $O(\rho^2)$ собственным значением.

Добавим теперь в левую часть (52) слагаемое $-\langle z,h^0\rangle\mathfrak{B}(\mu,\nu)h^0\|h^0\|^{-2}$, где $h^0(\tau) = \rho^{-1/2}\hat{y}'(\tau)$. В результате получим спектральную задачу

$$\widehat{\mathfrak{B}}(\mu,\nu)z = \lambda z, \quad z \in H.$$

Ясно, что $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu,\nu)h^0 = 0$. Спектральные свойства оператора $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu,\nu)$ аналогичны таковым для оператора $\mathfrak{B}(\mu,\nu)$. В частности, $2\rho\mathrm{Re}\,\mathrm{c}+\mathrm{O}(\rho^2)$ — собственное значение оператора $\widehat{\mathfrak{B}}(\mu,\nu)$, которому соответствует собственная функция

$h^1 = z^1 + O(\rho^2)$, где z^1 удовлетворяет равенству (53). Далее воспользуемся равенством $\widehat{\mathfrak{B}}^* q = 0$, где

$$q = q(\tau, \mu, \nu) = |c|^{-1} \mathrm{Im}\,(\mathrm{c} \exp{(\mathrm{i}\tau)}) + \mathrm{O}(\rho^{1/2}), \quad \|\mathrm{q}\| = 1.$$

Обозначим $M_1 = \mathrm{Span}\{h^1\}$. Пусть H разложено по $\{0, 2\rho \mathrm{Re}\,\mathrm{c} + \mathrm{O}(\rho^2)\}$, т.е.

$$H = Ker(\widehat{\mathfrak{B}}) \oplus M_1 \oplus M_2.$$

В силу альтернативы Фредгольма [35] уравнение

$$\widehat{\mathfrak{B}}(\mu, \nu) z = g, \quad g \in H,$$

разрешимо тогда и только тогда, когда $\langle g, q \rangle = 0$. Ясно, что это уравнение имеет при этом единственное решение $\mathfrak{K} g \in H^2$ такое, что $\langle \mathfrak{K} g, h^0 \rangle = 0$. Согласно изложенному имеют место оценки

$$\|\mathfrak{K} g\|_{H^1} < d \|g\|_H, \quad g \in M_2,$$
$$\|\mathfrak{K} g\|_{H^1} < \frac{d}{\rho} \|g\|_H, \quad g \in M_1.$$

Пусть $\widehat{P}$ — проектор в пространстве H на $Ker(\widehat{\mathfrak{B}}) \oplus M_1$. В силу построения $\hat{v}_{k+}$ справедливо неравенство

$$\|\widehat{P} f_0(\cdot, \mu, \nu)\| < d\rho^{5/2}.$$

Рассмотрим теперь уравнение (49). Заменим в нем $\mathfrak{B}$ на $\widehat{\mathfrak{B}}$. Это замену мы учтем и в правой части. Правую часть обозначим $\widehat{F}$. В этой связи отметим, что согласно проведенному анализу задачи (52)

$$\|\mathfrak{B}(\mu, \nu) h^0\| < d\rho, \quad \|\widehat{P} \mathfrak{B}(\mu, \nu) h^0\| < d\rho^{3/2}.$$

Рассмотрим в пространстве H^1 уравнение

$$w - \mathfrak{K}(\widehat{F}(\cdot, w, w', \mu, \nu, \delta) - \langle q, \widehat{F}(\cdot, w, w', \mu, \nu, \delta) \rangle q) = 0. \tag{54}$$

Теперь ясно, что метод последовательных приближений с нулевой начальной точкой приводит к сходящейся в H^1 последовательности равномерно по μ, ν, δ в области $0 \le \mu \le \mu_0$, $0 \le \nu \le \nu_0$, $|\delta| \le d\rho^{3/2}$. Предел этой последовательности $w^*(\mu, \nu, \delta)$ является решением уравнения (54) таким, что

$$\|w^*(\mu, \nu, \delta)\|_{H^1} < d\rho^{3/2}. \tag{55}$$

Согласно (50) существует единственное решение уравнения (54), удовлетворяющее этому неравенству. Функция $w^*(\mu, \nu, \delta) \in H^2$ при $\mu > 0$ ($w^*(0, \nu, \delta) \in H^1$) непрерывна по μ, ν, δ и удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{B}(\mu, \nu) z = F(\tau, z, z', \mu, \nu, \delta) - \mathfrak{D}(\mu, \nu, \delta) q(\tau),$$

где

$$\mathfrak{D}(\mu,\nu,\delta) = \langle q, \widehat{F}(\cdot, w^*(\mu,\nu,\delta), w^{*\prime}(\mu,\nu,\delta), \mu,\nu,\delta)\rangle.$$

Несложно убедиться в том, что $w^*(\mu,\nu,\delta)$ имеет непрерывную производную по δ. Итак, вопрос о разрешимости уравнения (49) в пространстве H^2 при $\mu > 0$ (H^1 при $\mu = 0$) сводится к вопросу о разрешимости относительно δ уравнения

$$\mathfrak{D}(\mu,\nu,\delta) = 0. \tag{56}$$

Несложно убедиться в справедливости равенства

$$\mathfrak{D}(\mu,\nu,\delta) = \rho(|c|^{-1}\mathrm{Re}\,c\delta + \rho^{3/2}\sigma(\mu,\nu,\delta)),$$

где $\sigma(\mu,\nu,\delta)$ непрерывна по всем переменным и непрерывно дифференцируема по δ. Отсюда следует существование непрерывного при $0 \le \mu \le \mu_0$, $0 \le \nu \le \nu_0$ решения $\delta = \delta(\mu,\nu)$ уравнения (56) такого, что

$$|\delta(\mu,\nu)| < d\rho^{3/2}.$$

Следовательно, $w^*(\mu,\nu,\delta(\mu,\nu))$ — 2π-периодическое решение уравнения (46) при $0 \le \mu \le \mu_0$, $0 \le \nu \le \nu_0$. Очевидно,

$$|\delta(\mu,\nu)| + \|w^*(\mu,\nu,\delta(\mu,\nu))\|_{H^1} < d\rho^{3/2}(\mu,\nu).$$

Теорема доказана.

Ясно, что соответствующий результат имеет место относительно периодических по t решений $v_{k^-}(\eta,\mu,\nu)$ уравнения (8).

Опираясь на теорему, можно получить легко проверяемые условия устойчивости бегущей волны v_{k^+}. Введем с этой целью следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_{k^+,s^-} &= 4\mathrm{Re}\,\lambda_{\mathrm{k}^+} - \mathrm{Re}\,\lambda_{\mathrm{s}^-} - \mathrm{Re}\,\lambda_{\mathrm{l}^+},\\ b_{k^+,s^-} &= (2\mathrm{Re}\,\lambda_{\mathrm{k}^+} - \mathrm{Re}\,\lambda_{\mathrm{s}^-})(2\mathrm{Re}\,\lambda_{\mathrm{k}^+} - \mathrm{Re}\,\lambda_{\mathrm{l}^+}) - \mathrm{Re}\,\lambda_{\mathrm{k}^+}^2,\\ \beta_{k^+,s^-} &= \chi\mathrm{Re}\,\lambda_{\mathrm{k}^+}(\mathrm{Re}\,\lambda_{\mathrm{s}^-} - \mathrm{Re}\,\lambda_{\mathrm{l}^+}), \end{aligned}$$

где $l = 2k+s+1$. Для устойчивости матриц A_{k^+,s^-}, $\overline{A}_{k^+,s^-}$, $s \ge 0$, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство

$$d_{k^+,s^-} = a_{k^+,s^-}^2 b_{k^+,s^-} - b_{k^+,s^-}^2 - \beta_{k^+,s^-}^2 > 0.$$

Согласно (5)–(7), (10) $\mathrm{Re}\,\lambda_{\mathrm{k}^+} = -\widehat{\Lambda}^{-1}\nu(1+\widehat{\Lambda}(\mathrm{m}^+ + \mathrm{kq})^2\varepsilon^2)$, где $\varepsilon^2 = \frac{\mu}{\nu}$. В силу (12) b_{k^+,s^-} принимает минимальное значение при $s = 0$. Будем далее считать, что μ/ν достаточно мало. Легко видеть, что тогда $b_{k^+,0^-} > 0$, если

$$m^+ + kq < (-\widehat{\Lambda}^{-1})^{1/2}(\frac{2\nu}{5\mu})^{1/2}.$$

Для выполнения условия $d_{k^+,s^-} > 0$, $s \geq 0$, достаточно, чтобы

$$m^+ + kq < (-\widehat{\Lambda}^{-1})^{1/2}(\frac{2\nu}{(5+4\chi^2)\mu})^{1/2}.$$

Это условие при малых μ/ν гарантирует устойчивость матриц A_{k^+,s^-} $s \geq 0$.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости матрицы A_{k^+,s^+}, $0 \leq s < k$. Несложный анализ приводит к следующему заключению: при малых μ/ν для устойчивости матрицы A_{k^+,s^+}, $0 \leq s < k$, достаточно устойчивости матрицы $A_{k^+,(k-1)^+}$. Легко видеть, что если эта матрица устойчива, то

$$m^+ + kq < (\frac{\nu}{3\mu})^{1/2}(-\widehat{\Lambda}^{-1})^{1/2}. \tag{57}$$

Заметим, что это неравенство эквивалентно неравенству

$$(1+\widehat{\Lambda}(m^+ + kq)^2\frac{\mu}{\nu}) > \frac{2}{3}(1+\widehat{\Lambda}(m^+)^2\frac{\mu}{\nu}). \tag{58}$$

Для устойчивости матрицы $A_{k^+,(k-1)^+}$ достаточно, чтобы

$$m^+ + kq < (\frac{\nu}{(3+8\chi^2)\mu})^{1/2}(-\widehat{\Lambda}^{-1})^{1/2}. \tag{59}$$

Итак, для устойчивости бегущей волны v_{k+} при малых $\mu > 0$, $\nu > 0$, $\frac{\mu}{\nu}$ достаточно выполнения неравенства (59). Если имеет место неравенство, строго противоположное неравенству (57), то волна v_{k+} неустойчива. Отметим, что достаточным условием устойчивости бегущей волны v_{k-} является неравенство (59), в котором m^+ заменено на m^-.

Итак, при сформулированных выше условиях и при $\mu/\nu \to 0$ в рассматриваемой задаче реализуется феномен буферности, т.е. неограниченно увеличивается количество сосуществующих экспоненциально орбитально устойчивых периодических по t решений типа бегущих волн.

Рассмотрим вырожденный случай $\mu = 0$. В силу (13) при $\nu > 0$ имеется счетное число различных (с точностью до сдвигов по t) бегущих волн $\widehat{v}_{k^+}$, $\widehat{v}_{k^-}$, $k = 0, 1, \dots$, уравнения (8), амплитуды которых равны. Очевидно, все величины b_{k^+,s^-}, $s = 0, 1, \dots$, равны нулю. Следовательно, матрицы A_{k^+,s^-}, $s = 0, 1, \dots$, неустойчивы. Таким образом, все малые бегущие волны уравнения (8) при $\mu = 0$, $\nu > 0$ неустойчивы.

7. Высокомодовая буферность

Примем в качестве бифуркационного параметра величину h. Предположим, что

$$h = \widehat{h} + \nu, \quad \widehat{h} = 2\pi p/q,$$

где ν меняется в окрестности нуля. Здесь натуральные p, q такие же, как в равенстве (4).

Определим согласно (5) при $h = \widehat{h}$ величины $m^+ < m^-$, $m^+ + m^- = q$. Рассмотрим уравнение (6) при $h = \widehat{h}$. Пусть $\widehat{K}$ — решение этого уравнения. Положим $\widehat{\Lambda}(\widehat{K}) = \widehat{\Lambda}$, $w(\widehat{K}) = \widehat{w}$. Выполним в уравнении (1) преобразование

$$u = v + \widehat{w}$$

и представим полученное уравнение в виде

$$\dot{v} = \mathfrak{L}_1(\mu, \nu)v + \mathfrak{R}_1(Qv, \nu), \tag{60}$$

где

$$\mathfrak{L}_1(\mu, \nu)v = \mu\Delta v - v + \widehat{\Lambda}Qv,$$
$$\mathfrak{R}_1(v, \nu) = \widehat{K}\gamma[\cos(\widehat{w} + v) - \cos\widehat{w} + v\sin(\widehat{w})].$$

Здесь $\widehat{\Lambda} = -\widehat{K}\gamma\sin(\widehat{w})$. Мы предполагаем, что $\widehat{\Lambda} < -1$.

Очевидно, имеет место равенство

$$\mathfrak{L}_1(\mu, \nu)\exp(im\theta) = \lambda^1_m(\mu, \nu)\exp(im\theta), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ,$$

где

$$\lambda^1_m(\mu, \nu) = -1 - \mu m^2 + \widehat{\Lambda}\exp(im(\widehat{h} + \nu)), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{61}$$

Обозначим

$$\delta_{s\pm}(\mu, \nu) = -\mu(m^{\pm} + sq)^2 - \nu\widehat{\Lambda}(m^{\pm} + sq)\sin m^{\pm}\widehat{h}, \quad s = 0, 1, 2, \dots . \tag{62}$$

В силу формулы Тейлора и выбора $\widehat{K}$ имеем равенство

$$\mathrm{Re}\,\lambda^1_{\mathrm{s}\pm}(\mu, \nu) = \delta_{\mathrm{s}\pm}(\mu, \nu) + \mathrm{O}(\nu^2). \tag{63}$$

Предположим теперь, что

$$\sin m^+\widehat{h} > 0. \tag{64}$$

Тогда $\delta_{k^-}(\mu, \nu) < 0$ при $\nu > 0$ и всех $k \geq 0$. Таким образом, не существуют в окрестности нуля бегущих волн уравнения (60) с топологическими зарядами вида $m^- + kq$, $k = 0, 1, \dots$. Рассуждая, как и выше, приходим к следующему заключению: если $\delta_{k^+}(\mu, \nu) > 0$, то уравнение (60) при $\nu > 0$ имеет приближенное по невязке порядка $\delta_{k^+}(\mu, \nu)^{3/2}$, периодическое по t решение $\widehat{v}^1_{k^+}$, которое определяется равенствами (26), (27), где s, λ_{s^+} заменены соответственно на k, $\lambda^1_{k^+}$.

Исследуем по изложенной выше методике характер устойчивости бегущей волны $\widehat{v}^1_{k+}$ уравнения (60). В результате приходим к заключению, что взаимодействие устойчивой бегущей волны $\widehat{v}^1_{k+}$ с бегущей волной $\widehat{v}^1_{s-}$ порождает устойчивую матрицу

$$A^1_{k+,s^-} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(\lambda^1_{s-} - 2\lambda^1_{k+}) - i(\mathrm{Im}\,c\rho_{k+} - \gamma_{k+,s^-}) & \overline{c}\rho_{k+} \\ c\rho_{k+} & \mathrm{Re}\,(\lambda_{l+} - 2\lambda_{k+}) + i(\mathrm{Im}\,c\rho_{k+} + \gamma_{k+,s^-}) \end{pmatrix}, \tag{65}$$

а ее взаимодействие с бегущей волной $\widehat{v}^1_{s+}$, $0 \le s < k$, порождает устойчивую матрицу

$$A^1_{k+,s^+} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(\lambda^1_{s+} - 2\lambda^1_{k+}) - i(\mathrm{Im}\,c\rho_{k+} - \gamma_{k+,s^+}) & \overline{c}\rho_{k+} \\ c\rho_{k+} & \mathrm{Re}\,(\lambda_{n+} - 2\lambda_{k+}) + i(\mathrm{Im}\,c\rho_{k+} + \gamma_{k+,s^+}) \end{pmatrix}, \tag{66}$$

где $l = 2k + s + 1$, $n = 2k - s$, $\gamma_{k^+,s^-} = \nu\widehat{\Lambda}(k + s + 1)q\cos m^+\widehat{h}$, $\gamma_{k^+,s^+} = \nu\widehat{\Lambda}(k - s)q\cos m^+\widehat{h}$. Так как при рассматриваемых условиях уравнение (60) бегущей волны $\widehat{v}^1_{s-}$ не имеет, то предложение о взаимодействии бегущей волны $\widehat{v}^1_{k+}$ с бегущей волной $\widehat{v}^1_{s-}$ следует понимать как чисто формальное, порождающее матрицу $A^1_{k^+,s^-}$.

Обозначим

$$\mathfrak{D}^1_{k+} = \{(\mu,\nu) : \mu > 0, \nu > 0, \delta_{k^+}(\mu,\nu) > 0\},$$

где $k \ge 0$ — некоторое целое число. Следуя доказательству теоремы 1, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Существует* $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(k)$, *что для всех* $(\mu,\nu) \in \mathfrak{D}^1_{k+}$ *таких, что* $\|(\mu,\nu)\| < \varepsilon_0$, *уравнение* (60) *имеет периодическое по* t *решение* $v^1_{k+}(\eta,\mu,\nu)$, $\eta = \omega^1_{k+}(\mu,\nu)t + (m^+ + kq)\theta$, *где*

$$v^1_{k+} = (\rho^1_{k+})^{1/2} 2\cos\eta + \widehat{\Lambda}\,\mathrm{ctg}\,\widehat{w}\rho_{k^+}((1-\widehat{\Lambda})^{-1} + \mathrm{Re}\,b\exp(2i(\eta + m^+h))) + o(\mu,\nu). \tag{67}$$

Здесь

$$\rho^1_{k+} = \frac{\delta_{k^+}(\mu,\nu)}{-\mathrm{Re}\,c} + o(\|(\mu,\nu)\|), \quad \omega^1_{k+}(\mu,\nu) = \mathrm{Im}\,\lambda^1_{k+}(\mu,\nu) + \mathrm{Im}\,c\rho^1_{k+} + o(\|\mu,\nu\|), \tag{68}$$

а b *удовлетворяет равенству* (19). *Для экспоненциальной орбитальной устойчивости* $v^1_{k+}(\mu,\nu)$ *необходимо и достаточно:*

iii) для любого $s \ge 0$ *матрица* $A^1_{k^+,s^-}(\mu,\nu)$ *устойчива;*

iv) для любого $0 \le s < k$ *матрица* $A^1_{k^+,s^+}(\mu,\nu)$ *устойчива.*

Найдем условия устойчивости бегущей волны v^1_{k+} при условии, что ее топологический заряд является достаточно большим. Следовательно, μ/ν является малым параметром. Дальнейший анализ опирается лишь на предположение о достаточной малости параметра μ/ν. Найдем необходимое условие устойчивости бегущей волны v^1_{k+}. Рассмотрим с этой целью матрицу $A^1_{k+,(k-1)+}(\mu,\nu)$. Согласно критерию Рауса–Гурвица для устойчивости этой матрицы необходимо, чтобы

$$\operatorname{Re}\operatorname{Tr}A^1_{k+,(k-1)+}\operatorname{Re}\det A^1_{k+,(k-1)+}+\operatorname{Im}\operatorname{Tr}A^1_{k+,(k-1)+}\operatorname{Im}\det A^1_{k+,(k-1)+}<0. \quad (69)$$

Из этого условия следует неравенство

$$b^1_{k+,(k-s)+}=(2\operatorname{Re}\lambda^1_{k+}-\operatorname{Re}\lambda^1_{(k-s)+})(2\operatorname{Re}\lambda^1_{k+}-\operatorname{Re}\lambda^1_{(k+s)+})-(\operatorname{Re}\lambda^1_{k+})^2>0.$$

В силу (61)–(63) отсюда получаем

$$-6(m^++kq)^2+6(m^++kq)\alpha-\alpha^2>0,$$

где $\alpha=\frac{\nu}{\mu}(-\widehat{\Lambda})\sin m^+\widehat{h}$. Следовательно, если $\frac{\nu}{\mu}\gg 1$ и бегущая волна $v^1_{k+}(\mu,\nu)$ является устойчивой, то

$$\frac{3-\sqrt{3}}{6}\frac{\nu}{\mu}(-\widehat{\Lambda})\sin m^+\widehat{h}<m^++kq<\frac{3+\sqrt{3}}{6}\frac{\nu}{\mu}(-\widehat{\Lambda})\sin m^+\widehat{h}. \quad (70)$$

Предположим теперь, что $\chi^2<3$. Можно убедиться, что тогда для устойчивости матрицы $A^1_{k+,(k-1)+}(\mu,\nu)$ достаточно, чтобы имело место неравенство

$$\frac{3+\chi^2-\sqrt{3-\chi^2}}{6+\chi^2}\frac{\nu}{\mu}(-\widehat{\Lambda})\sin m^+\widehat{h}<m^++kq$$
$$<\frac{3+\chi^2+\sqrt{3-\chi^2}}{6+\chi^2}\frac{\nu}{\mu}(-\widehat{\Lambda})\sin m^+\widehat{h}. \quad (71)$$

Более того, в этом случае устойчивы как матрицы $A^1_{k+,s+}$, $1\le s<k$, так и матрицы $A^1_{k+,s-}$, $s=0,1,\dots$. Итак, если выполнено неравенство (71), то при малых μ/ν волна v_{k+} устойчива. Если имеет место неравенство, строго противоположное неравенству (70), то при малых μ/ν волна v_{k+} неустойчива.

Заметим, что выполнение неравенства $\chi^2>3$ не означает, что при малых μ/ν не существует в уравнении (60) малых устойчивых решений типа бегущих волн. Оценки (71) в отличие от оценок (70) являются грубыми.

Отметим, что условие (70) с точностью $O(\|(\mu,\nu)\|^2)$ эквивалентно неравенству

$$\delta_{k+}(\mu,\nu)>\frac{2}{3}\sup_{0\le s<k}\delta_{s+}(\mu,\nu). \quad (72)$$

При $\chi^2 < 3$ в силу (71) в уравнении (60) при $\frac{\nu}{\mu} \to \infty$, $\frac{\nu^2}{\mu} \to 0$ реализуется так называемая высокомодовая буферность [15], т.е. устойчивыми оказываются лишь бегущие волны v^1_{k+} с достаточно большими топологическими зарядами.

Теперь опишем механизм возникновения высокомодовой буферности. С этой целью фиксируем номер $k \gg 1$ и перейдем от параметров μ, ν к параметрам μ, ε, где $\varepsilon = \nu/\mu$. Считая, что μ фиксировано, примем в качестве бифуркационного параметра величину ε. В этой связи будем рассматривать величину δ_{k+}, определенную равенством (62), как функцию параметра ε. Очевидно, $\delta_{k+}(\varepsilon)$ монотонно возрастает на положительной полуоси. При прохождении параметром ε бифуркационного значения, которое удовлетворяет (приближенно) уравнению $\delta_{k+}(\varepsilon) = 0$, из неустойчивого нулевого состояния равновесия уравнения (60) бифурцирует неустойчивая бегущая волна $v^1_{k+}(\varepsilon)$. Увеличение ε приводит в силу (68) к увеличению амплитуды бегущей волны $v^1_{k+}(\varepsilon)$. В силу (72) изменение характера устойчивости $v^1_{k+}(\varepsilon)$ происходит при критическом значении ε^{us}_{k+}. Ясно, что

$$\delta_{k+}(\varepsilon^{us}_{k+}) \geq \frac{2}{3}\delta_{(k-1)^+}(\varepsilon^{us}_{k+}).$$

Отметим, что при этом справедливо неравенство $\delta_{k+}(\varepsilon^{us}_{k+}) > \delta_{(k+1)^+}(\varepsilon^{us}_{k+})$. Вместе с увеличением δ_{k+} возрастают и $\delta_{(k-1)^+}$, $\delta_{(k+1)^+}$, при этом $\delta_{(k+1)^+}$ возрастает быстрее, чем δ_{k+}. При значении ε^{su}_{k+} волна v^1_{k+} давится парой бегущих волн $v^1_{(k-1)^+}$, $v^1_{(k+1)^+}$.

Рассмотрим теперь вырожденный случай $\mu = 0$. Тогда при $\nu > 0$ существует счетное число различных (с точностью до сдвигов по t) бегущих волн v^1_{k+}, $k = 0, 1, \ldots$, уравнения (60), амплитуды которых неограниченно растут с увеличением топологического заряда. Ясно, что тогда $b^1_{k+,s+} < 0$, $0 \leq s < k$. Таким образом, все бегущие волны уравнения (8) при $\nu > 0$, $\mu = 0$ неустойчивы.

Заключение

Согласно проведенному анализу характер устойчивости бегущей волны v_{k+} уравнения (8) определяется ее взаимодействиями конкурентного типа с парами бегущих волн v_{s-}, $v_{(2k+s+1)^+}$, $s = 0, 1, \ldots$, v_{s+}, $v_{(k-s)^+}$, $s = 0, 1, \ldots, k-1$. При этом наибольшее давление на v_{k+} при $k \gg 1$ оказывает пара бегущих волн $v_{(k-1)^+}$, $v_{(k+1)^+}$. Характер устойчивости v_{k+} определяется в результате взаимодействия с указанной парой, а само это взаимодействие описывается системой уравнений (39), в которой $s = k - 1$.

Реализация при $t \to \infty$ того или иного устойчивого режима $v_{k\pm}$ зависит от начальных условий, а переход системы от одного из устойчивых режимов к другому устойчивому режиму определяется конечными флуктуациями. Учитывая, что при достаточно малом μ/ν число различных устойчивых бегущих волн велико, переход системы из одного устойчивого режима в другое носит случайный характер.

Итак, локальная динамика семейства уравнений (8) при указанных выше условиях определяется G-эквивариантной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Размерность этой системы, очевидно, пропорциональна $(\nu/\mu)^{1/2}$. Построение аппроксимирующей уравнение (8) в окрестности нуля системы обыкновенных дифференциальных может быть осуществлено естественным обобщением конструкции из разд. 5. Структура полученной системы позволяет, как было показано, провести анализ устойчивости бегущих волн двупараметрического семейства уравнений (8).

Локальная динамика семейства уравнений (60) определяется G-эквивариантной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, размерность которой пропорциональна ν/μ. Таким образом, в этом случае при фиксированном ν размерность инерциального многообразия имеет порядок μ^{-1}.

Отметим здесь принципиальную особенность динамики бегущих волн. Очевидно, что последовательно рождающиеся из нуля бегущие волны семейства уравнений (8) имеют противоположные направления вращения. В случае же семейства уравнений (60) все бегущие волны вращаются в одном направлении. Однако, как в первом, так и во втором случаях, фазовые скорости бегущих волн различны. В этой связи бегущие волны имеют гармоническую форму, а их взаимодействия конкурентного типа характеризуются следующим принципом.

Принцип 1:2 взаимодействия бегущих волн. *Характер устойчивости бегущей волны v_{k+} семейства уравнений* (8) *вполне определяется ее взаимодействиями с парами бегущих волн: v_{s-}, $v_{(2k+s+1)+}$, $s \geq 0$; v_{s+}, $v_{(2k-s)+}$, $0 \leq s < k$.*

Этот принцип имеет место, разумеется, и относительно бегущих волн семейства уравнений (60).

В завершение отметим интересную особенность динамики бегущих волн, которая характеризуется так называемым принципом максимума амплитуды [10, 11, 13, 28]. Согласно теореме 1, следствию 1, неравенствам (58), (72) имеет место

Принцип максимума амплитуды. *Бегущая волна неустойчива, если квадрат ее амплитуды меньше двух третих максимального значения квадрата амплитуды.*

Этот принцип имеет асимптотический характер, т.е. справедлив при достаточно малых μ/ν и для волн с большими топологическими зарядами. Есть основания полагать, что принцип максимума амплитуды имеет универсальный характер. В этой связи отметим, что полученное в работе [33] условие неустойчивости спиновых волн горения согласуется с этим принципом.

Автор признателен О.Б. Лыковой, О.В. Анашкину за полезные советы.

Список литературы

[1] *S.A. Akhmanov, M.A. Vorontsov, and V.Yu Ivanov.*, Structure generation in optical systems with two-dimensional feedback: toward the development of nonlinear optical analogues of neuron networks. New principles of treatment of optical information. Nauka, Moscow, 1990. (Russian)

[2] *S.A. Kashchenko*, Asymptotics of spatially inhomogeneous structures in coherent nonlinear-optical systems. — *Zhurn. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* **31** (1991), 467–473. (Russian)

[3] *A.V. Razgulin*, Self-induced oscillations in a nonlinear parabolic problem with a transformed argument. — *Zhurn. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.* **33** (1993), 69–80. (Russian)

[4] *E.V. Grigorieva, H. Haken, S.A. Kashchenko, and A. Pelster*, Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback. — *Physika D* **125** (1999), 123–141.

[5] *E.P. Belan*, On the interaction of travelling waves in a parabolic functional-differential equation. — *Diff. Uravn.* **40** (2004), 645–654. (Russian)

[6] *A.L. Skubachevskii*, Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics. — *Nonlinear Anal.: Theory, Meth. & Appl.* **12** (1998), 261–278.

[7] *A.L. Skubachevskii*, On the Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional-differential equation. — *Diff. Uravn.* **34** (1998), 1394–1401. (Russian)

[8] *E.P. Belan*, On the bifurcation of periodic solutions in a parabolic functional-differential equation. — *Tavrida National University, Letters. Ser. Mat., Mech., Inform., Cybernet.* (2002), No. 2, 11–23. (Russian)

[9] *E.P. Belan and O.B. Lykova*, On the bifurcation of rotating waves in a parabolic problem with a transformed argument. — *Dop. Nats. Akad. Nauk Ukr.* (2003), No. 1, 7–12. (Russian)

[10] *E.P. Belan*, On auto-oscillations in a singularly perturbed parabolic equation with a transformed argument. — *Dop. Nats. Akad. Nauk Ukr.* (2002), No. 7, 7–12.

[11] *E.P. Belan*, Bifurcation of dissipative structures in a parabolic problem with the modified argument and a small diffusion. — In: *Proc. Ukr. Math. Congress-2001, Dynamical systems.* Institute of Mathematics, Kiev, 2003, 20–33. (Russian)

[12] *E.P. Belan*, On the bufferness in a parabolic problem with the modified argument and a small diffusion. — *Diff. Uravn.* **39** (2003), 1576–1577. (Russian)

[13] *A.Yu. Kolesov, E.F. Mishchenko, and N.Kh. Rozov*, The phenomenon of the parametric buffer property in systems of parabolic and hyperbolic equations with small diffusion. — *Ukr. Mat. Zhurn.* **50** (1998), No. 1, 22–35. (Russian)

[14] *A.Yu. Kolesov, E.F. Mishchenko, and N.Kh. Rozov*, The buffer phenomenon in resonance systems of nonlinear hyperbolic equations. — *Uspekhi Mat. Nauk* **55** (2000), issue 2, 95–120. (Russian)

[15] *A.Yu. Kolesov and N.Kh. Rozov*, Parametric excitation of high-mode oscillations in the nonlinear telegraph equation. — *Mat. Sb.* **191** (2000), issue 8, 45–68. (Russian)

[16] *N.N. Bogolubov and Ju.A. Mitropolski*, Asymptotical methods in nonlinear oscillation theory. Nauka, Moscow, 1969. (Russian)

[17] *Ju.A. Mitropolski and O.B. Lykova*, Integral manifolds in nonlinear mechanics. Nauka, Moscow, 1973. (Russian)

[18] *V.A. Pliss*, A reduction principle in the theory of stability of motion. — *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.* **28** (1964), 1297–1324. (Russian)

[19] *D. Ruelle*, Bifurcations in the presence of a symmetry group. — *Arch. Rat. Mech. Anal.* **51** (1973), № 2, 136–152.

[20] *Ju.A. Mitropolski and B.I. Moiseyenkov*, Asymptotical solutions of partial differential equations. Vyshcha Shkola, Kiev, 1976. (Russian)

[21] *J.E. Marsden and M. McCracken*, Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya. Mir, Moscow, 1980. (Russian)

[22] *V.I. Arnol'd, V. S. Afrajmovich, Yu. S. Il'yashenko, and L.P. Shil'nikov*, Bifurcation theory. — *Itogi Nauki i Tekhniki. Current problems in mathematics. Fundamental directions. VINITI*, Moscow **5** (1985), 5–218. (Russian)

[23] *O.B. Lykova and Ya.B. Baris*, Approximate integral manifolds. Naukova Dumka, Kiev, 1993. (Russian)

[24] *Y.A. Kuznetzov*, Elements of applied bifurcation theory. Springer–Verlag, New York, 1998.

[25] *M.I. Rabinovich and D.I. Trubetskov*, Introduction to the theory of oscillation and wave. Nauka, Moscow, 1984. (Russian)

[26] *A.V. Gaponov-Grekhov, A.S. Lomov, G.V. Osipov, and M.I. Rabinovich*, Pattern formation and dynamics of two-dimensional structures in nonequilibrium dissipative media. — *Nonlinear waves.* Res. Rep. Phys., Springer, Berlin **1** (1989), 65–89.

[27] *A.D. Myshkis*, Mixed functional-differential equations. — *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* **4** (2003), 5–120. (Russian)

[28] *Ya.B. Zeldovich and B.A. Malomed*, Complex wave regimes in distributed dynamical systems. — *Radiophys. and Quantum Electronics* **25** (1982), 591–618. (Russian)

[29] *A.V. Babin and M.I. Vishik*, Attractors of evolutional equations. Nauka, Moscow, 1989. (Russian)

[30] *R. Temam*, Infinite-dimensional dynamical systems in mechnics and physics. Springer, New York, 1988.

[31] *I.D. Chueshov*, Introduction to the theory of inertial manifolds. Kharkov Gos. Univ., Kharkov, 1982. (Russian)

[32] *I.D. Chueshov*, Introduction to the theory of infinite-dimensional dissippative systems. Acta Sci. Publ. House, Kharkov, 2002.

[33] *A.P. Aldushin and B.A. Malomed*, Phenomenological description of nonstationary non-homogeneous burn waves. — *Fizika goreniya i vzryva* **17** (1981), No. 1, 3–12. (Russian)

[34] *A.B. Vasil'eva, S.A. Kashchenko, Yu.S. Kolesov, and N.Kh. Rozov*, The bifurcation of auto-oscillation of nonlinear parabolic equations with a small diffusion. — *Mat. Sb.* **30(172)** (1986), issue 4(8), 488–499. (Russia)

[35] *J. Hale*, Theory of Functional Differential Equations. Springer–Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.

[36] *T. Kato*, Perturbation Theory for Linear Operators. Springer–Verlag, New York, 1966.

[37] *A.Yu. Kolesov and N.Kh. Rozov*, Optical buffering and mechanisms for its occurrence. — *Teoret. Mat. Fiz.* **140** (2004), No. 1, 14–28. (Russian)

Travelling waves dynamics in a nonlinear parabolic equation with a shifted spatial argument

E.P. Belan

Department of Mathematics and Information Science
V.I. Vernadsky Tavrida National University
4 Vernadsky Str., Simpheropol, 95036, Ukraine

The local dynamics of a nonlinear parabolic equation on a circle with a shifted spatial argument and a small diffusion is studied. It is proved that the travelling waves interaction satisfies to 1:2 principle. The maximum principle for amplitudes with coefficient $2/3$ is established. A number of stable travelling waves increases when the diffusion coefficient tends to zero.

Key words: parabolic equations, running waves, stability.