Журнал математической физики, анализа, геометрии
2005, т. 1, № 1, с. 35–52

Распределение собственных значений ансамбля разбавленных матриц с зависимыми элементами, возникающего в теории случайных графов

В.В. Венгеровский

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина
E-mail:vengerovsky@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 17 января 2005 г.

Для некоторого ансамбля разбавленных случайных матриц доказана слабая сходимость по вероятности последовательности считающих мер. Преобразование Стилтьеса предельной меры выражается с помощью функции, однозначно определяемой некоторым функциональным уравнением.

Для деякого ансамблю розбавлених випадкових матриць доведено слабку збіжність за ймовірністю послідовності рахуючих мір. Перетворення Стілтьєса граничної міри виражається за допомогою функції, що є однозначно визначеною деяким функціональним рівнянням.

1. Введение

Случайные матрицы бесконечно растущих размерностей впервые рассмотрены в работе [1]. С тех пор были найдены многочисленные приложения в теоретической и математической физике и глубокие связи с другими областями математики (см., напр., [2]). Главным объектом этих исследований является распределение собственных значений случайных матриц в бесконечномерном пределе.

Исследованиям спектральных свойств различных ансамблей случайных матриц посвящена обширная литература (см. [3] и цитируемую там литературу). Особое место в этих исследованиях занимают так называемые ансамбли разбавленных матриц, поскольку их спектральные свойства предполагаются намного более сложными и разнообразными, чем у большинства других известных ансамблей с независимыми элементами. В частности, в работах

Mathematics Subject Classification 2000: 60B10, 60H30.

[4, 5] на физическом уровне строгости показано, что в ансамблях такого типа при некоторых критических значениях параметров происходит переход типа андерсоновской локализации.

Одно из приложений спектральной теории разбавленных случайных матриц связано с теорией случайных графов. Действительно, матрица смежности A_N простого графа из N вершин является симметричной 0-1 матрицей $N \times N$, а множество ее собственных значений называется спектром графа [6]. Таким образом, вопрос о спектре случайного графа есть вопрос о распределении собственных значений соответствующей случайной матрицы.

В статьях [7, 8] изучены взвешенные матрицы смежности некоторого класса случайных графов. Было показано, что в пределе $N \to \infty$ моменты нормированной считающей функции и преобразование Стилтьеса определяются замкнутой системой уравнений. Это позволяет получить информацию о предельном распределении собственных значений соответствующего семейства случайных графов.

В последнее время возник интерес к свойствам случайных блужданий по случайным графам [10, 11]. Матрица смежности A графа G используется для изучения случайных блужданий по G [9]. Матрица вероятностей перехода однородной случайной прогулки задается матрицей TA, где T — диагональная $N \times N$ матрица с элементами $T_{ii} = (\sum_{j=1}^{N} A_{ij})^{-1}$. Сходимость к равномерному распределению над G связана с собственными значениями $L = \sqrt{T}A\sqrt{T}$.

Рассмотрим ансамбль вещественных симметрических $N \times N$ матриц, элементы которых принимают значения

$$A_{ij}^{(N,p)} = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \ p/N, \\ 0, & \text{с вероятностью } 1 - p/N \end{cases} \tag{1.1}$$

и $\left\{ A_{ij}^{(N,p)} \right\}_{1 \le i \le j \le N}$ являются независимыми в совокупности случайными величинами. Здесь и далее p — фиксированное положительное число. Пусть

$$D_{ij}^{(N,p)} = (\mu + \sum_{k=1}^{N} A_{ik}^{(N,p)}) \cdot \delta_{ij}, \quad \mu > 0. \tag{1.2}$$

Рассмотрим матрицу

$$W^{(N,p)} = \left[D^{(N,p)} \right]^{-1/2} \cdot A^{(N,p)} \cdot \left[D^{(N,p)} \right]^{-1/2}. \tag{1.3}$$

Обозначим собственные значения этой матрицы $\lambda_1^{(N,p)} \le \lambda_2^{(N,p)} \le \ \ldots \le \ \lambda_N^{(N,p)}$ и определим считающую меру

$$\sigma(\Delta; W^{(N,p)}) = \frac{\#\{j : \lambda_j^{(N,p)} \in \Delta\}}{N}. \tag{1.4}$$

Заметим, что спектр матрицы $W^{(N,p)}$ совпадает со спектром матрицы $\left[D^{(N,p)}\right]^{-1} \cdot A^{(N,p)}$, которая, как упоминалось выше, определяет динамику случайных блужданий на графе Γ с матрицей смежности $A^{(N,p)}$. Обозначим через $g_{N,p}(z)$ преобразование Стилтьеса нормированной считающей меры $\sigma(\lambda, W^{(N,p)})$

$$g_{N,p}(z) = \int \frac{d\sigma(\lambda, W^{(N,p)})}{\lambda - z}.$$

Основной целью настоящей работы является изучение поведения $g_{N,p}(z)$ при $N \to \infty$.

Теорема 1. *(i) дисперсия $g_{N,p}(z)$ стремится к 0 при $N \to \infty$, причем*

$$\mathbf{E}\{|g_{N,p}(z) - \mathbf{E}\{g_{N,p}(z)\}|^2\} \leq \frac{C(z,p,\mu)}{N}\,; \qquad (1.5)$$

(ii) существует $h(z) : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$, где $\mathbb{C}_+ = \{z : \Re z > 0\}$, для которой

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}\{g_{N,p}(z)\} = ih(-iz), \qquad (1.6)$$

причем стремление равномерное на любом компакте в $\mathbb{C}_+$,

$$h(z) = e^{-p} \int_0^\infty e^{-uz} \sum_{k=0}^\infty \frac{p^k}{k!} f^k(\frac{u}{\mu + k}, z) du, \qquad (1.7)$$

где $f(u,z)$ — единственное решение функционального уравнения:

$$(iii) \qquad f(u,z) = 1 - u^{1/2} e^{-p} \int_0^\infty dv e^{-zv(1+\mu)} \frac{\mathcal{J}_1(2\sqrt{uv})}{\sqrt{v}} e^{pe^{-zv} f(v,z)} \qquad (1.8)$$

в классе аналитических по z функций в $\mathbb{C}_+$ таких, что при любом фиксированном z $||f(u,z)|| = \sup_{u>0} \dfrac{|f(u,z)|}{\sqrt{1+u}} < \infty$. Здесь и далее $\mathcal{J}_1(\zeta)$ — это функция Бесселя:

$$\mathcal{J}_1(\zeta) = \frac{\zeta}{2} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-\zeta^2/4)^k}{k!(k+1)!}. \qquad (1.9)$$

Из теоремы 1 вытекает слабая сходимость по вероятности последовательности считающих мер $\sigma(\lambda, W^{(N,p)})$. В работе использован метод, предложенный в [8] для изучения преобразования Стилтьеса считающей меры матрицы смежности $A^{(N,p)}$. Однако в нашем случае его применение сильно усложняется тем, что матричные элементы $W^{(N,p)}$ в отличие от $A^{(N,p)}$ являются зависимыми. Это потребовало существенной модернизации метода [8], в частности, введения промежуточной матрицы $G^{(N,p)}$ (см. (2.3)).

2. Доказательство основного результата

Обозначим

$$R^{(N,p)}(z)=\Big(zI-iW^{(N,p)}\Big)^{-1}. \tag{2.1}$$

Тогда

$$R^{(N,p)}(z)=\Big[D^{(N,p)}\Big]^{1/2}\cdot G^{(N,p)}(z)\cdot\Big[D^{(N,p)}\Big]^{1/2}, \tag{2.2}$$

где

$$G^{(N,p)}(z)=\Big(zD^{(N,p)}-iA^{(N,p)}\Big)^{-1}. \tag{2.3}$$

Поэтому

$$R^{(N,p)}_{jj}(z)=G^{(N,p)}_{jj}(z)\cdot D^{(N,p)}_{jj}. \tag{2.4}$$

На первом этапе доказательства получим замкнутое функциональное уравнение для $\mathbf{E}f_N(u,z)=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}\mathbf{E}e^{-u\frac{G^{(N,p)}_{kk}}{1+zG^{(N,p)}_{kk}}}$ с исчезающей в пределе погрешностью. Для этого представим $G^{(N,p)}_{NN}(z)$ в виде

$$G^{(N,p)}_{NN}(z)=\left(zD^{(N,p)}_{NN}-iA^{(N,p)}_{NN}+\sum_{j,k=1}^{N-1}\widetilde{G}^{(N-1,p)}_{jk}A^{(N,p)}_{Nj}A^{(N,p)}_{Nk}\right)^{-1}, \tag{2.5}$$

где матрица $\{\widetilde{G}^{(N-1,p)}_{ij}(z)\}_{i,j=1}^{N-1}$ есть обратная к матрице $zD^{(N,p)}-iA^{(N,p)}$, у которой вычеркнуты последняя строчка и последний столбец. Откуда следует, что

$$\begin{aligned}\frac{G^{(N,p)}_{NN}}{1+zG^{(N,p)}_{NN}}&=\frac{1}{\Big[G^{(N,p)}_{NN}\Big]^{-1}+z}\\&=\left(zD^{(N,p)}_{NN}-iA^{(N,p)}_{NN}+\sum_{j,k=1}^{N-1}\widetilde{G}^{(N-1,p)}_{jk}A^{(N,p)}_{Nj}A^{(N,p)}_{Nk}+z\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Воспользуемся тождеством, которое получается почленным интегрированием ряда для $\mathcal{J}_1$:

$$e^{-uR}=1-u^{1/2}\int_0^\infty dv\,\frac{\mathcal{J}_1(2\sqrt{uv})}{\sqrt{v}}\exp\{-R^{-1}v\}, \tag{2.7}$$

где $u\geq 0$, $\Re R>0$. Отсюда, пользуясь тем, что

$$\Re G^{(N,p)}_{NN}>0,\ \Re\frac{G^{(N,p)}_{NN}}{1+zG^{(N,p)}_{NN}}>0\quad\text{при }\Re z>0$$

на основании (2.6), получим

$$\exp\{-u\frac{G_{NN}^{(N,p)}}{1+zG_{NN}^{(N,p)}}\} = 1 - u^{1/2}\int\limits_0^\infty dv\frac{\mathcal{J}_1(2\sqrt{uv})}{\sqrt{v}}$$
$$\times \exp\{-zD_{NN}^{(N,p)}v + iA_{NN}^{(N,p)}v - v\sum_{j,k=1}^{N-1}\widetilde{G}_{ij}^{(N-1,p)}A_{Ni}^{(N,p)}A_{Nj}^{(N,p)} - zv\}. \quad (2.8)$$

Обозначим

$$R_1(z) = \sum_{j,k=1}^{N-1}\widetilde{G}_{ij}^{(N-1,p)}A_{Ni}^{(N,p)}A_{Nj}^{(N,p)} - \sum_{i=1}^{N-1}\widetilde{G}_{ii}^{(N-1,p)}\left[A_{Ni}^{(N,p)}\right]^2$$
$$= \sum_{j\neq k}\widetilde{G}_{jk}^{(N-1,p)}A_{Nj}^{(N,p)}A_{Nk}^{(N,p)}. \quad (2.9)$$

Пусть

$$L^{(\mu)}(q,M) = \left\{z:\ \frac{|z|}{|\Re z|} \le q(\mu+1),\ \Re z \ge M)\right\}, 0 < q < 1, M > 0.$$

Доказательства утверждений 1–4 и леммы 1 будет дано в разд. 3.

Утверждение 1. *Верна следующая оценка:*

$$\mathbf{E}\{|R_1(z)|^2\} \le \frac{C(q,M)(1+p^4)}{\sqrt{N}},\ \textit{для}\ z \in L^{(\mu)}(q,M). \quad (2.10)$$

Здесь и далее C будет означать некую константу (разную в разных местах), не зависящую от N, z.

Пусть $\widehat{D}^{(N-1,p)}$, $\check{D}^{(N-1,p)}$ — диагональные $(N-1)\times(N-1)$ матрицы вида

$$\widehat{D}_{ij}^{(N-1,p)} = \delta_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N-1}A_{ik}^{(N,p)} + \mu\right),\ \check{D}_{ij}^{(N-1,p)} = \delta_{ij}A_{Ni}^{(N,p)}. \quad (2.11)$$

Матрица $\widehat{A}^{(N-1,p)}$ — это матрица $A^{(N,p)}$ без последнего столбца и последней строчки. Введем также

$$\widehat{G}^{(N-1,p)} = \left(z\widehat{D}^{(N-1,p)} - i\widehat{A}^{(N-1,p)}\right)^{-1}. \quad (2.12)$$

Заметим, что, в отличие от $\widetilde{G}^{(N-1,p)}$, $\widehat{G}^{(N-1,p)}$ не зависит от $\{A_{Ni}\}_{i=1}^N$.

Обозначим

$$R_2(z) = \sum_{i=1}^{N-1}\left(\widetilde{G}_{ii}^{(N-1,p)} - \left[\left(1 + z\widehat{G}^{(N-1,p)}\check{D}^{(N-1,p)}\right)^{-1}\right]_{ii}\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)}\right)\left[A_{Ni}^{(N,p)}\right]^2. \quad (2.13)$$

Утверждение 2.

$$\mathbf{E}\,|R_2(z)|^2 \le \frac{C(q,M,\mu)}{N} \quad \textit{для } z \in L^{(\mu)}(q,M). \tag{2.14}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} R_3(z) \;\; &= \;\; \sum_{i=1}^{N-1} \left(\left(1 + z\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)} \check{D}_{ii}^{(N-1,p)}\right)^{-1} \right. \\ &- \;\; \left. \left[\left(1 + z\widehat{G}^{(N-1,p)} \check{D}^{(N-1,p)}\right)^{-1} \right]_{ii} \right) \widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)} \left[A_{Ni}^{(N,p)}\right]^2 . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Утверждение 3.

$$\mathbf{E}\,|R_3(z)|^2 \le \frac{C(q,M)}{N} \textit{ для } z \in L^{(\mu)}(q,M). \tag{2.16}$$

Так как справедливы неравенства

$$\Re\left\{ \sum_{i,j} \tilde{G}_{ij}^{(N-1,p)} A_{Ni}^{(N,p)} A_{Nj}^{(N,p)} \right\} \ge 0,$$

$$\Re\left\{ \sum_{i} \left(1 + z\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)} \check{D}_{ii}^{(N-1,p)}\right)^{-1} \widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)} \left[A_{Ni}^{(N,p)}\right]^2 \right\} \ge 0,$$

то из неравенства

$$|e^{-z_1} - e^{-z_2}| \le \max\{|e^{-z_1}|, |e^{-z_2}|\} |z_1 - z_2| \tag{2.17}$$

и определений R_1, R_2, R_3 (см. (2.9), (2.13), (2.15)) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \exp\left\{ -u \frac{G_{NN}^{(N,p)}}{1 + zG_{NN}^{(N,p)}} \right\} &= 1 - u^{1/2} \int_0^\infty dv \frac{\mathcal{J}_1(2\sqrt{uv})}{\sqrt{v}} \mathbf{E} \exp\{ -zD_{NN}^{(N,p)} v + iA_{NN}^{(N,p)} v \\ - v \sum_i \left(1 + z\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)} \check{D}_{ii}^{(N-1,p)}\right)^{-1} &\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)} \left[A_{Ni}^{(N,p)}\right]^2 - zv \} + \tilde{r}_N(u), \end{aligned} \tag{2.18}$$

где

$$\begin{aligned} |\tilde{r}_N(u)| &\le \mathbf{E}\left(|R_1| + |R_2| + |R_3|\right) u^{1/2} \int_0^\infty dv \left| \mathcal{J}_1(2\sqrt{uv}) \sqrt{v} e^{-z(\mu+1)v} \right| \\ &\le C\,\mathbf{E}\left(|R_1| + |R_2| + |R_3|\right) u^{1/2} |\Re z|^{-3/2} (\mu+1)^{-3/2}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве использовалась оценка $|\mathcal{J}_1(u)| \le 1$ (см. [12]). Принимая во внимание утверждения 1–3, получим

$$|\tilde{r}_N(u)|^2 \le \frac{Cu(1+p^4)}{\sqrt{N}|\Re z|^3(\mu+1)^3},\ z \in L^{(\mu)}(q,M). \tag{2.19}$$

Преобразуем правую часть (2.18). Очевидно, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\Big(\exp\Big\{-zD_{NN}^{(N,p)}v + iA_{NN}^{(N,p)}v \\
&-v\sum_i \Big(1+z\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)}\check{D}_{ii}^{(N-1,p)}\Big)^{-1}\ \widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)}A_{Ni}^{(N,p)}\Big\}\Big) \\
&= e^{-z\mu v}\Big((1-\frac{p}{N}) + \frac{p}{N}e^{-zv+iv}\Big) \\
&\times\mathbf{E}\Big\{\prod_{j=1}^{N-1}\Big((1-\frac{p}{N}) + \frac{p}{N}e^{-zv-v\left(1+z\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)}\right)^{-1}\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)}}\Big)\Big\} \\
&= e^{-z\mu v-p}\,\mathbf{E}\exp\Big\{pe^{-zv}\hat{f}_{N-1}(v,z)\Big\} + R_N(v),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

где $\hat{f}_{N-1}(v,z) = \dfrac{1}{N-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{N-1} e^{-v\left(1+z\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)}\right)^{-1}\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)}}$, а $R_N(v) \le \dfrac{C}{N}e^{-zv\mu}$.

Лемма 1. *Рассмотрим вещественную симметрическую матрицу* $A = \{A_{jk}\}_{j,k=1}^n$ *с матричными элементами вида* $A_{ij} = \phi_1(d_i)\phi_1(d_j)a_{ij}$, $i<j$, $A_{ii} = a_{ii}\phi_2(d_i) + \phi_3(d_i)$, *где* $d_i = \displaystyle\sum_{j=1}^n a_{ij}$, $\{a_{jk}\}_{j\le k}$ *— независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины, а функции* ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 *удовлетворяют условиям*

$$\left|\frac{\phi_1'(d_i)}{\phi_1(d_i)}\right| < C_0, \quad |\phi_1(d_i)| \le C_1, \quad |\phi_2'(d_i)| < C_2, \quad |\phi_3'(d_i)| < C_3. \tag{2.21}$$

Рассмотрим z: $\Re z > 0$ *и*

$$R = (z-iA)^{-1}, \quad F(R) = n^{-1}\sum_{j=1}^n \varphi(R_{jj}, d_j), \tag{2.22}$$

где функция φ *имеет ограниченные производные на произведении образов функций* R_{jj}, d_j *для всех* j:

$$\|\nabla\varphi(\zeta,\psi)\| \le C.$$

Тогда

$$\mathbf{E}|F(R)-\mathbf{E}F(R)|^2 \le C^2\frac{(C_{0,0}+C_{1,1}|z|)^2}{|\Re z|^4 n}P(n\mathbf{E}a_{12}, n\mathbf{E}a_{12}^2, n\mathbf{E}a_{12}^3, n\mathbf{E}a_{12}^4), \tag{2.23}$$

где $C_{0,0}, C_{1,1}$ *— константы, зависящие от* C_0, C_1, C_2, C_3, *но не зависящие от* C, *а* $P(x_1,x_2,x_3,x_4)$ *— фиксированный полином.*

Воспользовавшись неравенством (2.17), получим

$$\left|\mathbf{E}\exp\left\{pe^{-zv}\hat f_{N-1}(v,z)\right\}-\exp\left\{pe^{-zv}\mathbf{E}\hat f_{N-1}(v,z)\right\}\right| \le pe^{p-|\Re z|v}\mathbf{E}\left|\hat f_{N-1}(v,z)-\mathbf{E}\hat f_{N-1}(v,z)\right|. \tag{2.24}$$

Применяя лемму 1 для $\phi_1(d)=(\mu+d)^{-1/2}$, $\phi_2(d)=(\mu+d)^{-1}$, $\phi_3(d)=0$, $\varphi(\zeta,\psi)=\exp\{-v\dfrac{\zeta}{\mu+\psi+z\zeta}\}$, $C=v\widehat{C}$, $n=N-1$, получим

$$\mathbf{E}\left|\hat f_{N-1}(v,z)-\mathbf{E}\hat f_{N-1}(v,z)\right|^2 \le \frac{\widetilde{C}^2(q,M,p)\widehat{C}^2v^2}{N\,|\Re z|^2}, \quad z\in L^{(\mu)}(q,M). \tag{2.25}$$

Объединяя (2.24) и (2.25), получим для $z\in L^{(\mu)}(q,M)$

$$\left|\mathbf{E}\exp\left\{pe^{-zv}\hat f_{N-1}(v,z)\right\}-\exp\left\{pe^{-zv}\mathbf{E}\hat f_{N-1}(v,z)\right\}\right| \le pe^{p-|\Re z|v}\frac{\widetilde{C}(q,M,p)\widehat{C}v}{N^{1/2}\,|\Re z|}. \tag{2.26}$$

Пусть $f_N(u,z)=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}e^{-u\frac{G_{kk}^{(N,p)}}{1+zG_{kk}^{(N,p)}}}$. Из (2.18)–(2.20) и (2.25) следует

$$\mathbf{E}f_N(u,z)=1-u^{1/2}e^{-p}\int_0^\infty dve^{-zv(1+\mu)}\frac{\mathcal{J}_1(2\sqrt{uv})}{\sqrt{v}}e^{pe^{-zv}\mathbf{E}\hat f_{N-1}(v,z)}+r(u),$$

$$r(u)\le\frac{C^{(\mu,p)}(q,M)u^{1/2}}{N^{1/4}} \quad z\in L^{(\mu)}(q,M).$$

Теперь, чтобы получить замкнутое уравнение для $\mathbf{E}f_N$, осталось заменить $\mathbf{E}\hat f_{N-1}$ в правой части на $\mathbf{E}f_N$. Это позволяет сделать

Утверждение 4.

$$\left|\mathbf{E}f_N(v,z)-\mathbf{E}\hat f_{N-1}(v,z)\right|\le\frac{C^{(\mu,p)}(q,M)}{N^{1/2}}, \quad z\in L^{(\mu)}(q,M). \tag{2.27}$$

Используя утверждение 4 и неравенство (2.17), получим

$$\mathbf{E}f_N(u,z) = 1 - u^{1/2}e^{-p}\int\limits_0^\infty dve^{-zv(1+\mu)}\frac{\mathcal{J}_1(2\sqrt{uv})}{\sqrt{v}}e^{pe^{-zv}\mathbf{E}f_N(v,z)} + r(u),$$

$$r(u) \le \frac{C^{(\mu,p)}(q,M)u^{1/2}}{N^{1/4}}, \quad z \in L^{(\mu)}(q,M). \tag{2.28}$$

Рассмотрим банахово пространство $\mathcal{H}$ функций $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ с нормой

$$||h(u)|| = \sup_{u>0}\frac{|h(u)|}{\sqrt{1+u}}.$$

Определим оператор $F_z : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$F_z(\varphi)(u) = 1 - u^{1/2}e^{-p}\int\limits_0^\infty dve^{-zv(1+\mu)}\frac{\mathcal{J}_1(2\sqrt{uv})}{\sqrt{v}}e^{pe^{-zv}\varphi(v)}. \tag{2.29}$$

Обозначим $B_{0,2} = \{h \in \mathcal{H}, \|h\| \le 2\}$. Тогда для φ_1, $\varphi_2 : ||\varphi_1|| \le 2$, $\|\varphi_2\| \le 2$

$$\|F_z(\varphi_1) - F_z(\varphi_2)\| \le Cpe^{p+\frac{p^2}{|\Re z|(1+\mu)}}\left(|\Re z|^{-1} + |\Re z|^{-1/2}\right)\|\varphi_1 - \varphi_2\|. \tag{2.30}$$

Легко видеть, что существует M, для которого

$$\|F_z(\varphi_1) - F_z(\varphi_2)\| < 1/4\|\varphi_1 - \varphi_2\|, \quad z \in L^{(\mu)}(q,M), \tag{2.31}$$

и

$$\|F_z(0)\| = 1.$$

Поэтому $F_z : B_{0,2} \to B_{0,2}$ и $F_z|_{B_{0,2}}$ является сжимающим отображением для $z \in L^{(\mu)}(q,M)$. Следовательно, существует единственная неподвижная точка $f(u,z)$, которая является решением (1.8). Таким образом, $\mathbf{E}\{f_N(u,z)\} \to f(u,z)$ по норме при $N \to \infty$ равномерно по $z \in L^{(\mu)}(q,M)$. Зафиксируем u. Так как $\mathbf{E}\{f_N(u,z)\}$ аналитичны и равномерно ограничены в $\mathbb{C}_+$, из сходимости $\mathbf{E}\{f_N(u,z)\} \to f(u,z)$ при $z \in L^{(\mu)}(q,M)$ можно сделать вывод, что при фиксированном u существует аналитическое продолжение $f(u,z)$ в область $\mathbb{C}_+$ и $\mathbf{E}\{f_N(u,z)\}$ сходится к аналитическому продолжению $f(u,z)$ равномерно на каждом компакте в $\mathbb{C}_+$. Пользуясь теоремой Лебега об ограниченной сходимости, доказывается, что $F_z(\mathbf{E}f_N)(u,z) \to F_z(f)(u,z)$ для всех $z \in \mathbb{C}_+$. Так как функции $F_z(\mathbf{E}f_N)(u,z)$ аналитичны и равномерно ограничены при $\Re z > \varepsilon$, то получается, что $F_z(\mathbf{E}f_N)(u,z)$ сходится равномерно к $F_z(f)(u,z)$ на любом компакте в $z \in \mathbb{C}_+$. А значит, $F_z(f)(u,z)$ аналитична в $\mathbb{C}_+$. А так как, по доказанному ранее, $f(u,z) = F_z(f)(u,z), \quad z \in L^{(\mu)}(q,M)$, то по теореме единственности заключаем, что $f(u,z) = F_z(f)(u,z)$ при всех $z \in \mathbb{C}_+$.

Выразим теперь предел преобразований Стилтьеса меры (1.4) через $f(u,z)$. Применяя (2.4) и (2.5), получим

$$\mathbf{E}R_{NN}^{(N,p)}(z)$$
$$= \mathbf{E}\left\{\left(z - iA_{NN}^{(N,p)}\left[D_{NN}^{(N,p)}\right]^{-1} + \left[D_{NN}^{(N,p)}\right]^{-1}\sum_{j,k=1}^{N-1}\widehat{G}_{jk}^{(N-1,p)}A_{Nj}^{(N,p)}A_{Nk}^{(N,p)}\right)^{-1}\right\}.$$

Применяя затем (2.10),(2.14),(2.16) и равенство $x^{-1} = \int\limits_0^\infty e^{-ux}du$, несложно получить, что для $z \in L^{(\mu)}(q,M)$

$$\left|\mathbf{E}R_{NN}^{(N,p)} - \mathbf{E}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-uz + \frac{iuA_{NN}^{(N,p)}}{D_{NN}^{(N,p)}}\right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{u}{D_{NN}^{(N,p)}}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\widehat{G}_{kk}^{(N-1,p)}}{1 + z\check{D}_{kk}^{(N-1,p)}\widehat{G}_{kk}^{(N-1,p)}}\left[A_{kN}^{(N,p)}\right]^2\right\}du\right| \le \frac{C^{(\mu,p)}(q,M)}{\sqrt[4]{N}}.$$

Пользуясь теоремой Фубини, поменяем местами знак интегрирования и $\mathbf{E}\{\cdot\}$ в левой части неравенства. Тогда получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\,\exp\left\{\frac{iuA_{NN}^{(N,p)}}{D_{NN}^{(N,p)}} - \frac{u}{D_{NN}^{(N,p)}}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\widehat{G}_{kk}^{(N-1,p)}}{1 + z\widehat{G}_{kk}^{(N-1,p)}}A_{kN}^{(N,p)}\right\}\\
&\quad = \sum_{k=0}^{N-1}C_{N-1}^k\left(\frac{p}{N}\right)^{N-1-k}\left(1 - \frac{p}{N}\right)^k\\
&\quad \times\left(\left(1 - \frac{p}{N}\right)\mathbf{E}\exp\left\{\sum_{i=1}^k\frac{-u}{\mu + k}\frac{\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)}}{1 + z\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)}}\right\}\right.\\
&\quad \left. + \frac{p}{N}\mathbf{E}\exp\left\{\sum_{i=1}^k\frac{-u}{\mu + k + 1}\frac{\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)}}{1 + z\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)}}\right\}\right).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Используя оценку Ю.В. Прохорова (см. [13])

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|P_N(k) - \frac{e^{-p}p^k}{k!}\right| \le \frac{2p}{N}\min(2,p),$$

где

$$P_N(k) = \begin{cases} C_N^k \left(\frac{p}{N}\right)^{N-k} \left(1 - \frac{p}{N}\right)^k, & k = 0, 1, \ldots, N, \\ 0, & k > N, \end{cases}$$

получим

$$\left| \mathbf{E} \exp\left\{ \frac{iuA_{NN}^{(N,p)}}{D_{NN}^{(N,p)}} - \frac{u}{D_{NN}} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\widehat{G}_{kk}^{(N-1,p)}}{1 + z\widehat{G}_{kk}^{(N-1,p)}} A_{kN}^{(N,p)} \right\} \right.$$
$$\left. - e^{-p} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{p^k}{k!} \mathbf{E} \exp\left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{-u}{\mu + k} \frac{\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)}}{1 + z\widehat{G}_{ii}^{(N-1,p)}} \right\} \right| \le \frac{C}{N}. \qquad (2.33)$$

Легко видеть, что при фиксированном k и $N \to \infty$

$$\left| \mathbf{E} \exp\left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{-u}{\mu + k} \frac{\widehat{G}_{ii}^{(N-1)}}{1 + z\widehat{G}_{ii}^{(N-1)}} \right\} - \mathbf{E} f_N^k \left(\frac{u}{\mu + k}, z \right) \right| \le \frac{k(k-1)}{2N} + O(\frac{1}{N^2}),$$

$$\left| \mathbf{E} f_N^k(\frac{u}{\mu + k}, z) - \left(\mathbf{E} f_N(\frac{u}{\mu + k}, z) \right)^k \right| \le k\mathbf{E} \left| f_N(\frac{u}{\mu + k}, z) - \mathbf{E} f_N(\frac{u}{\mu + k}, z) \right|.$$

Применяя лемму 1 для $\phi_1(d) = (\mu + d)^{-1/2}$, $\phi_2(d) = (\mu + d)^{-1}$, $\phi_3(d) = 0$, $\varphi(\zeta, \psi) = \exp\{-u\frac{\zeta}{\mu + \psi + z\zeta}\}$, $C = u\widehat{C}$, $n = N$, получим

$$\mathbf{E} \left| f_N(u, z) - \mathbf{E} f_N(u, z) \right|^2 \le \frac{\widetilde{C}^2(q, M, p)\widehat{C}^2 u^2}{N} \quad z \in L^{(\mu)}(q, M). \qquad (2.34)$$

Откуда следует

$$\mathbf{E} \left| f_N(\frac{u}{\mu + k}, z) - \mathbf{E} f_N(\frac{u}{\mu + k}, z) \right| \le \frac{\widetilde{C}(q, M, p)\widehat{C} u}{N^{1/2}(\mu + k)}, \quad z \in L^{(\mu)}(q, M).$$

Поэтому для $z \in L^{(\mu)}(q, M)$

$$\mathbf{E}\{R_{NN}(z)\} = e^{-p} \int_0^\infty e^{-uz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \left[\mathbf{E} f_{N-1}(\frac{u}{\mu + k}, z) \right]^k du + o(1), \quad N \to \infty,$$

$$\mathbf{E}\{R_{NN}(z)\} = e^{-p} \int_0^\infty e^{-uz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} f^k(\frac{u}{\mu + k}, z) du + o(1), \quad N \to \infty.$$

Пусть

$$H^{(p)}[f](z) = e^{-p} \int_0^\infty e^{-uz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} f^k(\frac{u}{\mu + k}, z) du.$$

Функция $H^{(p)}[f](z)$ аналитична в $\mathbb{C}_+$. Так как функции $\mathbf{E}R_{NN}^{(N,p)}(z)$ аналитичны и равномерно ограничены при $\Re z > \varepsilon$, по доказанному ранее, $\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}R_{NN}^{(N,p)}(z) = H^{(p)}[f](z)$, $z \in L^{(\mu)}(q,M)$, то по теореме единственности заключаем, что $\lim_{N\to\infty}\mathbf{E}R_{N}^{(N,p)}(z) = H^{(p)}[f](z)$ при всех $z\in\mathbb{C}_+$, причем сходимость равномерна на любом компакте в $\mathbb{C}_+$. Кроме того, очевидно, что $\|W^{(N,p)}\| \le 1$, поэтому предельная мера будет вероятностной. Применяя лемму 1 для $\phi_1(d) = (\mu+d)^{-1/2}$, $\phi_2(d) = (\mu+d)^{-1}$, $\phi_3(d) = 0$, $\varphi(\zeta,\psi) = \zeta$, $n = N$, получим п. (i) теоремы 1.

3. Доказательства вспомогательных утверждений

Доказательство утверждения 1. Пусть $G^{(ij)}(z)$ обозначает матрицу $\widetilde{G}^{(N-1,p)}(z)$, в которой элементы $A_{Ni}^{(N,p)}$, $A_{Nj}^{(N,p)}$ заменены на 1. Аналогично введем обозначения $G^{(ijk)}(z)$, $G^{(ijkl)}(z)$ и $D^{(jk)}$. Матрица $\widetilde{D}^{(N-1,p)}$ — это матрица $D^{(N,p)}$ без последнего столбца и последней строки. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{|R_1(z)|^2\} &= 2\sum_{j\neq k}\mathbf{E}\Big\{\widetilde{G}_{jk}^{(N-1,p)}\overline{\widetilde{G}_{jk}^{(N-1,p)}}|A_{Nj}^{(N,p)}|^2|A_{Nk}^{(N,p)}|^2\Big\}\\ &+ 4\sum_{\neq(j,k_1,k_2)}\mathbf{E}\Big\{\widetilde{G}_{jk_1}^{(N-1,p)}\overline{\widetilde{G}_{jk_2}^{(N-1,p)}}|A_{Nj}^{(N,p)}|^2A_{Nk_1}^{(N,p)}A_{Nk_2}^{(N,p)}\Big\}\\ &+ \sum_{\neq(j_1,j_2,k_1,k_2)}\mathbf{E}\Big\{\widetilde{G}_{j_1k_1}^{(N-1,p)}\overline{\widetilde{G}_{j_2k_2}^{(N-1,p)}}A_{Nj_1}^{(N,p)}A_{Nj_2}^{(N,p)}A_{Nk_1}^{(N,p)}A_{Nk_2}^{(N,p)}\Big\}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Поэтому

$$\mathbf{E}\{|R_1(z)|^2\} \le 2\frac{p^2}{N^2}\sum_{j\neq k}\mathbf{E}\Big\{G_{jk}^{(jk)}\overline{G_{jk}^{(jk)}}\Big\} + 4\frac{p^3}{N^3}\sum_{\neq(j,k_1,k_2)}\mathbf{E}\Big\{\left|G_{jk_1}^{(jk_1k_2)}\right|\left|G_{jk_2}^{(jk_1k_2)}\right|\Big\}$$

$$+\frac{p^4}{N^4}\sum_{\neq(j_1,j_2,k_1,k_2)}\mathbf{E}\Big\{\left|G_{j_1k_1}^{(j_1j_2k_1k_2)}\right|\left|G_{j_2k_2}^{(j_1j_2k_1k_2)}\right|\Big\} = 2K_1+4K_2+K_3.$$

Далее для упрощения обозначений верхние индексы (N,p), $(N-1,p)$ у матриц A, $\widehat{G}$, $\widetilde{G}$ будут опускаться. Воспользуемся тождеством

$$L_1^{-1} - L_2^{-1} = L_2^{-1}(L_2 - L_1)L_1^{-1}. \tag{3.2}$$

Получим равенство

$$\begin{aligned}G_{jk}^{(jk)} &= \widetilde{G}_{jk} - \left[\widetilde{G}z\left(D^{(jk)} - \widetilde{D}\right)G^{(jk)}\right]_{jk}\\ &= \widetilde{G}_{jk} - G_{jj}^{(jk)}z(1-A_{Nj})\widetilde{G}_{jk} - G_{jk}^{(jk)}z(1-A_{Nk})\widetilde{G}_{kk}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Поэтому

$$K_1 = \frac{p^2}{N^2}\sum_{j\neq k}\mathbf{E}\Big\{G_{jk}^{(jk)}\overline{\widetilde{G}_{jk}^{(jk)}}\Big\} = \frac{p^2}{N^2}\sum_{j\neq k}\mathbf{E}\Big\{\left(\widetilde{G}_{jk} - G_{jj}^{(jk)}z(1-A_{Nj})\widetilde{G}_{jk}\right.$$

$$\left.-G_{jk}^{(jk)}z(1-A_{Nk})\widetilde{G}_{kk}\right)\left(\overline{\widetilde{G}_{jk}} - \overline{G_{jj}^{(jk)}}\overline{z}(1-A_{Nj})\overline{\widetilde{G}_{jk}} - \overline{G_{jk}^{(jk)}}\overline{z}(1-A_{Nk})\overline{\widetilde{G}_{kk}}\right)\Big\}. \tag{3.4}$$

Из (2.4) следует, что

$$\left|G_{jj}^{(jk)}\right| \leq \left|D_{jj}^{(jk)}\right|\frac{1}{|\Re z|} \leq \frac{1}{|\Re z|(\mu+1)}. \tag{3.5}$$

Аналогично, если хотя бы одно из $\{A_{ki}\}_{i=1}^{N}$ отлично от 0, то

$$\left|\widetilde{G}_{kk}\right| \leq \frac{1}{|\Re z|(\mu+1)}. \tag{3.6}$$

Если же все $A_{ki}=0$, то при $j\neq k$ $G_{jk}^{(jk)}=0$. Поэтому всегда

$$\left|G_{jk}^{(jk)}\widetilde{G}_{kk}\right| \leq \frac{\left|G_{jk}^{(jk)}\right|}{|\Re z|(\mu+1)}, \qquad j\neq k. \tag{3.7}$$

Обозначим $q = \dfrac{|z|}{|\Re z|(\mu+1)}$. Применяя неравества (3.5), (3.7) в (3.4), получим

$$K_1 \leq (1+q)^2\frac{p^2}{N^2}\sum_{j\neq k}\mathbf{E}\left\{\widetilde{G}_{jk}\overline{\widetilde{G}}_{kj}\right\} + 2q(1+q)\frac{1}{|\Re z|\,\mu}\frac{p^2}{N^2}\sum_{j\neq k}\mathbf{E}\left|\widetilde{G}_{jk}\right|$$

$$+ q^2\frac{p^2}{N^2}\sum_{j\neq k}\mathbf{E}\left\{\left|G_{jk}^{(jk)}\right|^2\right\} = (1+q)^2K_{1,1} + 2q(1+q)\frac{1}{|\Re z|\,\mu}K_{2,1} + q^2K_1, \tag{3.8}$$

где

$$K_{1,1} = \frac{p^2}{N^2}\sum_{j\neq k}\mathbf{E}\left\{\widetilde{G}_{jk}\overline{\widetilde{G}}_{kj}\right\} \leq \frac{p^2}{N^2}\sum_{j}\mathbf{E}\left[\widetilde{G}\overline{\widetilde{G}}\right]_{jj} \leq \frac{1}{N}\frac{p^2}{\mu^2\,|\Re z|^2} \tag{3.9}$$

$$K_{2,1} = \frac{p^2}{N^2}\sum_{j\neq k}\mathbf{E}\left|\widetilde{G}_{jk}\right| \leq \frac{p^2}{N^2}\left(\sum_{j\neq k}\mathbf{E}\left|\widetilde{G}_{jk}\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j\neq k}1\right)^{1/2} \leq \frac{1}{N^{1/2}}\frac{p^2}{\mu\,|\Re z|}. \tag{3.10}$$

Поэтому из (3.8) следует, что при $q^2 < 1 - \varepsilon < 1$, где ε — фиксированное положительное число,

$$K_1 \leq O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Аналогично доказываются неравенства для K_2 и K_3.

Доказательство утверждения 2. Так как

$$\widetilde{G} = \left(z\widehat{D} + z\check{D} - i\widehat{A}\right)^{-1} = \left(1 + z\widehat{G}\check{D}\right)^{-1}\widehat{G},$$

имеем

$$\sum_i \widetilde{G}_{ii}A_{Ni}^2 = \sum_{i,k}\left[\left(1 + z\widehat{G}\check{D}\right)^{-1}\right]_{ik}\widehat{G}_{ki}A_{Ni}^2 = \sum_i\left[\left(1 + z\widehat{G}\check{D}\right)^{-1}\right]_{ii}\widehat{G}_{ii}A_{Ni}^2$$

$$+\sum_{i\neq k}\left[\left(1 + z\widehat{G}\check{D}\right)^{-1}\right]_{ik}\widehat{G}_{ki}A_{Ni}^2.$$

Поэтому (ср. (2.13))

$$R_2(z) = \sum_{i\neq k}\left[\left(1 + z\widehat{G}\check{D}\right)^{-1}\right]_{ik}\widehat{G}_{ki}A_{Ni}^2.$$

Из (3.2) для $L_1 = 1 + z\widehat{G}\check{D}$ и $L_2 = 1$ следует, что

$$\left[\left(1 + z\widehat{G}\check{D}\right)^{-1}\right]_{ik} = \delta_{ik} - z\widetilde{G}_{ik}A_{Nk}.$$

Поэтому

$$|R_2| \leq \left|\sum_{i\neq k} z\widetilde{G}_{ki}\widehat{G}_{ki}A_{Nk}A_{Ni}^2\right| \leq \sum_{i\neq k}\frac{|z|}{|\Re z|\,\mu}\left|\widehat{G}_{ki}\right|A_{Nk}A_{Ni}^2$$

Откуда следует (2).

Доказательство утверждения 3. Из (3.2) следует

$$\left(1 + z\widehat{G}\check{D}\right)_{ii}^{-1} - \left(1 + z\widehat{G}_{ii}\check{D}_{ii}\right)^{-1}$$

$$= \sum_{k,i\neq k}\left(1 + z\widehat{G}_{ii}\check{D}_{ii}\right)^{-1} z\left[\widehat{G}\check{D}\right]_{ik}\left(1 + z\widehat{G}\check{D}\right)_{ki}^{-1}$$

$$= \sum_{k,i\neq k}\left(1 + z\widehat{G}_{ii}\check{D}_{ii}\right)^{-1} z\widehat{G}_{ik}\left(1 + z\widehat{G}\check{D}\right)_{ki}^{-1}A_{Nk}.$$

Поэтому (ср. (2.15))

$$R_3 = \sum_{i\neq k} \left(1 + z\widehat{G}_{ii}\check{D}_{ii}\right)^{-1} \widehat{G}_{ik} \left[\left(1 + z\widehat{G}\check{D}\right)^{-1}\right]_{ki} (-z)\widehat{G}_{ii}A_{Nk}A_{Ni}^2. \qquad (3.11)$$

Очевидно, что $\left|\widehat{G}_{ii}\right| \le |\Re z|^{-1}\mu^{-1}$. Кроме того, при $\check{D}_{ii} = A_{Ni} \neq 0$

$$\left|\left(1 + z\widehat{G}_{ii}\check{D}_{ii}\right)^{-1}\right| = \left|z\check{D}_{ii}\right|^{-1} \left|(z\check{D}_{ii})^{-1} + \widehat{G}_{ii}\right|^{-1} \le \frac{|z|^{-1}}{|\Re z^{-1}|} = \frac{|z|}{|\Re z|}. \qquad (3.12)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\Re\widehat{G}_{ii} > 0$. Если же $\check{D}_{ii} = 0$, то левая часть (3.12) оценивается 1. Поэтому

$$\left|\left(1 + z\widehat{G}_{ii}\check{D}_{ii}\right)^{-1} \widehat{G}_{ik}\right| \le C(q,\mu)\left|\widehat{G}_{ik}\right|, \quad z \in L^{(\mu)}(q,M). \qquad (3.13)$$

Таким образом, из (3.11) на основании (3.13) получим

$$|R_3(z)| \le C(q,\mu)\sum_{i\neq k}\left|\widehat{G}_{ik}\right| A_{Nk}A_{Ni}^2, \quad z \in L^{(\mu)}(q,M).$$

Откуда и вытекает (2.16).

Доказательство леммы 1. Обозначим символом $\mathbf{E}_k$ усреднение по всем $\{a_{ij}\}_{i\le j}$, $i \le k$ ($\mathbf{E}_n = \mathbf{E}$, $\mathbf{E}_0$ означает отсутствие усреднения). Тогда

$$\begin{aligned} F - \mathbf{E}F &= \sum_{k=0}^{n-1}(\mathbf{E}_kF - \mathbf{E}_{k+1}F) \Rightarrow \qquad \mathbf{E}|F(R) - \mathbf{E}F(R)|^2 \\ &= 2\sum_{j<k}\mathbf{E}(\mathbf{E}_kF - \mathbf{E}_{k+1}F)(\mathbf{E}_j\overline{F} - \mathbf{E}_{j+1}\overline{F}) + \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}|\mathbf{E}_kF - \mathbf{E}_{k+1}F|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}|\mathbf{E}_kF - \mathbf{E}_{k+1}F|^2. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\mathbf{E}(\mathbf{E}_kF - \mathbf{E}_{k+1}F)(\mathbf{E}_j\overline{F} - \mathbf{E}_{j+1}\overline{F}) = 0$ при $j \neq k$.

Пусть $F_k = F\Big|_{\{a_{kj}=0\}_{j=1}^n}$, а $\mathbf{E}^{(k)}$ обозначает усреднение по всем $\{a_{kj}\}_{j=k}^n$. Рассмотрим теперь

$$\mathbf{E}|\mathbf{E}_kF - \mathbf{E}_{k+1}F|^2 = \mathbf{E}|\mathbf{E}_k(F - \mathbf{E}^{(k+1)}F)|^2 \le \mathbf{E}\left|\mathbf{E}_k\left(F - F_{k+1}\right)\right|^2.$$

По неравенству Шварца

$$\mathbf{E}\left|\mathbf{E}_k\left(F-F_{k+1}\right)\right|^2 \le \mathbf{E}\mathbf{E}_k\left|\left(F-F_{k+1}\right)\right|^2 = \mathbf{E}\left|F-F_{k+1}\right|^2.$$

Поэтому в силу симметрии для всех k

$$\mathbf{E}|\mathbf{E}_kF-\mathbf{E}_{k+1}F|^2 \le \mathbf{E}\left|F-F_{k+1}\right|^2 = \mathbf{E}\left|F-F_1\right|^2. \tag{3.14}$$

Для того чтобы оценить $\mathbf{E}\left|F-F_1\right|^2$, введем матрицу $A(t)$ вида:

$$\begin{aligned}
&A_{ij}(t)=a_{ij}\phi_1(d_i(t))\phi_1(d_j(t)),\ i,j>1,\ i\ne j,\ A_{1j}(t)=ta_{1j}\phi_1(d_1(t))\phi_1(d_j(t)),\\
&A_{ii}(t)=a_{ii}\phi_2(d_i(t))+\phi_3(d_i(t))\\
&d_1(t)=td_1,\quad d_i(t)=ta_{i1}+\textstyle\sum_{j=2}^n a_{ij},\ i>1.
\end{aligned}$$

Определим также

$$R(t)=(z-iA(t))^{-1},\quad F(R(t))=n^{-1}\sum\varphi(R_{jj}(t),d_j(t)).$$

Тогда, очевидно,

$$F-F_1=\int_0^1\frac{d}{dt}F(R(t))dt. \tag{3.15}$$

Оценим $\dfrac{d}{dt}F(R(t))$:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt}F(R(t))\right| &= \Bigg|n^{-1}\sum\frac{\partial}{\partial d_j}\varphi(R_{jj}(t),d_j(t))d_j'(t)\\
&\qquad + i\sum\frac{\partial}{\partial R_{jj}}\varphi(R_{jj}(t),d_j(t))R_{jk}(t)A_{kl}'(t)R_{lj}(t)\Bigg|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le\frac{C}{n}\sum|d_i'|+\left|n^{-1}\sum_{k,l,k\ne l}(RDR)_{kl}A_{kl}(t)\left(\frac{\phi_1'(d_k(t))}{\phi_1(d_k(t))}d_k'(t)+\frac{\phi_1'(d_l(t))}{\phi_1(d_l(t))}d_l'(t)\right)\right|\\
&\qquad+\left|2n^{-1}\sum_{k\ne1}(RDR)_{k1}a_{k1}\phi_1(d_1(t))\phi_1(d_k(t))\right|\\
&\qquad+\left|n^{-1}\sum_k(RDR)_{kk}\left(a_{kk}\phi_2'(d_k(t))d_k'(t)+\phi_3'(d_k(t))d_k'(t)\right)\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le\frac{C}{n}\sum_j\left|d_j'\right|+\frac{2C}{|\Re z|^2n}\sum_{k\ne1}C_0\left(2|z|+|A_{kk}(t)|\right)|d_k'|+\frac{2CC_1^2}{n\left|\Re z\right|^2}\sum_k|a_{k,1}|\\
&\qquad+\frac{2C}{\left|\Re z\right|^2n}\sum_k\left(C_2a_{kk}+C_3\right)|d_k'|+\frac{2CC_0C_1^2}{n\left|\Re z\right|^2}\sum_{k\ne1}|a_{k,1}|.
\end{aligned}\tag{3.16}$$

Здесь мы обозначили $D_{ij} = \delta_{ij}\dfrac{\partial}{\partial R_{jj}}\varphi(R_{jj}(t), d_j(t))$ и воспользовались тем, что

$$\begin{aligned} &R(t)(z - iA(t)) = I \\ &\qquad\Rightarrow \sum_{l, l\neq k}(RDR)_{kl}(t)A_{lk}(t) = -(iz + A_{kk}(t))(RDR)_{kk} + i(RD)_{kk} \\ &\qquad\Rightarrow \Big|\sum_{l, l\neq k}(RDR)_{kl}(t)A_{lk}(t)\Big| \leq C|\Re z|^{-2}(2|z| + |A_{kk}(t)|), \end{aligned} \tag{3.17}$$

так как $\|R(t)\| \leq |\Re z|^{-1}$, $\|D\| \leq C$. Кроме того, очевидно, что

$$d'_1(t) = \sum_j a_{1j}, \quad d'_i(t) = a_{1i}, \quad i > 1. \tag{3.18}$$

Из условий (2.21) следует

$$|A_{kk}(t)| \leq |a_{kk}|(C_2|d_k| + C_{2,0}) + C_3|d_k| + C_{3,0} \leq C_4\left(|a_{kk} + 1|\right)\left(|d_k| + 1\right). \tag{3.19}$$

Применяя (3.17), (3.19) ко второй сумме в правой части (3.16), а также пользуясь (3.18), а затем (3.15), получим

$$|F - F_1| \leq \frac{CC_5}{|\Re z|^2 n}\left(1 + |z|^2\right)\left(\sum_{k\neq 1}|a_{k1}|\left(|a_{kk} + 1|\right)\left(|d_k| + 1\right)\right) \tag{3.20}$$

$$+ \frac{2}{n}\left(1 + \frac{CC_0C_1^2}{|\Re z|^2}\right)\sum_k |a_{k1}| + \frac{2C}{|\Re z|^2\, n}\sum_{k\neq 1}\left(C_2 a_{kk} + C_3\right)|a_{1k}| \tag{3.21}$$

$$+ \frac{2C}{|\Re z|^2\, n}\sum_k \left(C_2 a_{11} + C_3\right)|a_{1k}|. \tag{3.22}$$

Откуда и следует (2.23).

Доказательство утверждения 4. Утверждение следует из (2.25), (2.34) и (3.22) для $\varphi(R, d) = \exp\left\{\dfrac{-uR}{\mu + d + zR}\right\}$, $\phi_1(d) = (\mu + d)^{-1/2}$, $\phi_2(d) = (\mu + d)^{-1}$, $\phi_3(d) = 0$, $n = N$, т.к. $F = f_N(u, z)$, $F_1 = \dfrac{N-1}{N}\hat{f}_{N-1}(u, z) + \dfrac{1}{N}e^{-\dfrac{uz^{-1}}{\mu + 1}}$.

Список литературы

[1] *E. Wigner*, Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions. — *Ann. Math.* **62** (1955), 548–564.

[2] *M.L. Mehta*, Random Matrices. Acad. Press, New York, 1991.

[3] *L.A. Pastur*, Random matrices as paradigm. In: Math. Physics (2000), A. Fokas, A. Grigoryan, T. Kibble, B. Zegarlinski (Eds.). World Scientific, Singapore, 2000.

[4] *A.D. Mirlin and Y.V. Fyodorov*, Universality of the level correlation functions of sparse random matrices. — *J. Phys. A: Math. Jen.* **24** (1991), 2273–2286.

[5] *Y.V. Fyodorov and A.D. Mirlin*, Strong eigenfunction correlations near the Anderson localization transition. — *Phys. Rev. B.* **55** (1997), R16001–R16004.

[6] *M. Cvetkovich, M. Doob, and H. Sachs*, Spectra of Graphs. Acad. Press, New York, 1980.

[7] *M. Bauer and O. Golinelli*, Random incidence matrices: moments and spectral density. — *J. Stat. Phys.* **103** (2001), 301–336.

[8] *O. Khorunzhy, M. Shcherbina, and V. Vengerovsky*, Eigenvalue distribution of large weighted random graphs. — *J. Math. Phys.* **45** (2004), 1648–1672.

[9] *R.K. Chung Fan*, Spectra Graph Theory. AMS, Providence RI, 1997.

[10] *J. Jonasson*, On the cover time for random walks on random graphs. — *Combin. Probab. Comput.* **7** (1998), 265–279.

[11] *D.Y. Peng*, The average return time of random walks in random graphs. — *J. Math.* (Wuhan) **11** (1991), 140–144.

[12] *M. Abramowitz and I. Stegun*, Handbook of Mathematical Functions. Dover Publ., New York, 1972.

[13] *A.N. Shiryaev*, Probability. Second Edition, Nauka, Moscow, 1989.

Eigenvalue distribution of diluted random matrix ensemble with correlated entries appearing in the random graphs theory

V.V. Vengerovsky

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering
National Academy of Sciences of Ukraine, 47 Lenin Ave., Kharkov, 61103, Ukraine

Existing of weak limit in probability of counting measures of some ensemble of the diluted random matrices is proved. The Stiltjes transform of limiting measure is expressed by the function. This function is unique solution of the functional equation.

Key words: random matrises, random graphs.