Журнал математической физики, анализа, геометрии
2007, т. 3, № 1, с. 13–38

Лемма А. Картана по Б.Я. Левину с различными приложениями

Е.А. Горин

Математический факультет
Московский педагогический государственный университет
ул. М. Пироговская, 1, Москва, 119882, Россия
E-mail:evgeny.gorin@mtu-net.ru

Статья поступила в редакцию 14 августа 2006 г.

Пусть $X = \{X, d\}$ — полное сепарабельное метрическое пространство и μ — такая неотрицательная регулярная борелевская мера на X, что $\mu(X) < \infty$. Пусть $\varphi = \varphi(t)$ — строго возрастающая к бесконечности непрерывная вещественная функция на полуоси $[0, \infty)$, для которой $\varphi(0) = 0$. Положим, $B(a, t) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid d(x, a) < t\}$. Имеется ряд результатов, именуемых леммой Картана, в которых оценивается массивность множества тех $x \in X$, где *нарушается* условие

$$\mu(B(x, t)) < \varphi(t) \text{ при всех } t > 0.$$

Мы приведем один из таких результатов, который в свое время возник в связи с изучением лекций Б.Я. Левина в Москве в 1970 г., и дадим ряд приложений к некоторым задачам конечномерного и бесконечномерного анализа. Характерная особенность нашего подхода в том, что параметры типа размерности не фигурируют в исходных оценках (по крайней мере, явно).

В основном статья носит обзорный характер, но некоторые из приведенных здесь результатов раньше не публиковались.

Нехай $X = \{X, d\}$ — повний сепарабельний метричний простір та μ — така невід'ємна регулярна борелевська міра на X, що $\mu(X) < \infty$. Нехай $\varphi = \varphi(t)$ — строго зростаюча до нескінченності неперервна дійсна функція на півосі $[0, \infty)$, для якої $\varphi(0) = 0$. Припустимо, $B(a, t) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid d(x, a) < t\}$. Існує низка результатів, що іменуються лемою Картана, в яких дають оцінку масивності множини тих $x \in X$, де *порушується* умова

$$\mu(B(x, t)) < \varphi(t) \text{ при всіх } t > 0.$$

Ми наводимо один з таких результатів, який свого часу виник у зв'язку з вивченням лекцій Б.Я. Левіна в Москві у 1970 р., та надаємо низку застосувань до деяких задач скінченновимірного та нескінченновимірного аналізу. Характерна особливість нашого підходу в тому, що параметри типу розмірності не фігурують у початкових оцінках (принаймні, явно).

В основному стаття носить оглядовий характер, але деякі з наведених тут результатів раніше не публікувалися.

Ключевые слова: лемма Картана, метрическое пространство, мера.

Mathematics Subject Classification 2000: 30-02, 31-02.

Посвящается 100–летию Б.Я. Левина

Введение

1. Леммой Картана именуют целый ряд предложений. Самым популярным является утверждение об оценке снизу модуля полинома

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ \ldots \ + a_n.$$

Наиболее аккуратной из известных является следующая форма: для каждого $h > 0$ существует такой набор из $\leq n$ дисков с суммой радиусов $\leq 2h$, что вне объединения этих дисков $\log|f(z)| > n\log(h/e)$. Этот результат среди прочего был получен А. Картаном в конце 20-х годов прошлого века. Р. Боас [1, с. 54] отмечает, что несколько раньше, но в менее точной форме аналогичное предложение было доказано Бутру (Pierre Boutroux).

Первоначально (см., напр., [2]) Борис Яковлевич давал прямое (не очень короткое) доказательство этого факта, но затем, не особенно заботясь о несущественных константах, выводил его из общих оценок мер и потенциалов [3, 4].

Эти оценки мер и потенциалов также часто называются леммой Картана, причем, не только в работах по теории аналитических функций (см., напр., [5, 6]).

2. В 1970 году Б.Я. Левин прочел спецкурс по теории целых функций на механико-математическом факультете МГУ. Записки этих лекций составили небольшую книгу [3], изданную тиражом 400 экз. (по цене 60 коп.). Гораздо позже расширенный вариант этих лекций составил книгу [4], написанную при участии Ю. Любарского, М. Содина и В. Ткаченко. Б.Я. Левин предполагал одновременное издание русского варианта, но не успел реализовать этот замысел.

Обстоятельства сложились так, что я не смог слушать лекции 70–го года, однако, к счастью, стал обладателем книги [3] (с моего экземпляра вскоре было сделано десяток копий), и с этого началось мое знакомство с различными вариантами леммы Картана.

В те годы Борис Яковлевич часто бывал в Москве, и я периодически обсуждал с ним эту тему. Помню, что его доказательство одной промежуточной леммы я никак не мог понять, а он утверждал, что там все в порядке. В принципе Борис Яковлевич был прав, но для полной ясности перед некоторым интегралом надо было поставить другой коэффициент (который в конечном счете не играл никакой роли).

Вскоре я занялся неравенствами Бернштейна. Первый обзор на эту тему [7] был приурочен к столетию Харьковского математического общества. Вскоре, по предложению Ю.А. Брудного, я прочел серию лекций на эту тему в Ярославском университете и записал их [8] (параллельно Ю.А. Брудный читал спецкурс по теории приближений, и из бюрократических соображений оказалось более удобным выпустить записки обоих спецкурсов, снабженные обоими нашими именами).

В этом курсе и записках я рассказывал не только о своих «спектральных» достижениях, но и о классической теории мажорант, начатой С.Н. Бернштейном и завершенной Б.Я. Левиным. Изложение этой теории в упомянутых текстах опиралось на лемму Картана в тех ее вариантах, которые содержались в лекциях [3]. В частности, как и у Бориса Яковлевича, константы явно зависели от параметров, напрямую связанных с размерностью.

Позже в связи с совместными с А.Л. Колдобским занятиями уравнениями в свертках в бесконечномерных пространствах, немного изменив акценты, мне удалось освободиться от этой явной зависимости (размерность оказалась теперь связанной с выбором мажоранты). Впервые в таком варианте лемма Картана появилась в заметке [9], где вместе со схемой доказательства заняла всего несколько строчек.

3. Дальнейший план таков. Сначала я введу все необходимые предварительные понятия (в основном, следуя [3]) и дам полное доказательство простейшему (и основному) варианту абстрактной леммы Картана. Затем приведу несколько разнообразных ее применений (лемма Картана для полиномов, оценки слабого типа, уравнения в свертках на бесконечномерных пространствах). В заключение я совсем кратко остановлюсь на других вариантах и применениях.

1. Основная теорема

1. В этом разделе (и, как правило, в дальнейшем) $X = \{X, d\}$ — полное сепарабельное метрическое пространство. Хотя свойства полноты и сепарабельности не всегда используются, наличие этих свойств, как известно, заметно упрощает задачу, когда речь идет о борелевских мерах.

При $a \in X$ и $t \geq 0$ положим

$$B(a,t) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid d(a,x) < t\}.$$

При $t = 0$ это множество пусто, а при $t > 0$ — *открытый шар* радиуса t с центром в точке a. Замыкание этого множества обозначается $\overline{B}(a,t)$. Далее, если в определении (открытого) шара заменить строгое неравенство нестрогим $d(a,x) \leq t$, то возникающее множество обозначается $\widehat{B}(a,t)$ и называется *замкнутым шаром.*

Ясно, что $B \subset \overline{B} \subset \widehat{B}$, причем в общем метрическом пространстве такие три множества могут оказаться как совпадающими, так и попарно различными.

Фиксируем некоторый гомеоморфизм $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, который будем называть *мажорантой.*

В этом разделе мы будем рассматривать неотрицательные конечные регулярные борелевские меры μ на X (конечность меры означает, что $\mu(X) < \infty$). Точку $x \in X$ будем называть *правильной,* если

$$\mu(B(x,t)) < \varphi(t) \ \text{ при всех } \ t > 0.$$

Для каждой точки $x \in X$ положим

$$\tau(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{t \geq 0 \mid \mu(B(x,t)) \geq \varphi(t)\}.$$

Очевидно, что это определение корректно и что x — правильная точка тогда и только тогда, когда $\tau(x) = 0$.

При фиксированном $x \in X$ положим $g_x(t) = \mu(B(x,t))$. Функция g_x монотонна и непрерывна слева. Поэтому мы можем построить меру μ_x Лебега — Стилтьеса, полагая на стрелках $\mu_x([\alpha,\beta)) = g_x(\beta) - g_x(\alpha)$. Принцип Кавальери позволяет утверждать, что в достаточно широком классе функций

$K = K(t)$ имеет место тождество

$$\int\limits_X K(d(x,y))\,\mu(dy) = \int\limits_0^\infty K(t)\,dg_x(t), \tag{1}$$

которое служит одним из основных поводов для следующих ниже построений. Заметим, кстати, что $g_x(t+0) = \mu(\widehat{B}(x,t))$.

2. Следующая лемма легко вытекает из определений (здесь и ниже сохранены введенные выше обозначения).

Лемма 1. *Если $s = \tau(x)$, то $\mu(B(x,s)) = \varphi(s)$. Кроме того, функция g_x непрерывна в точке s.*

Теперь мы переходим к одному из основных фактов.

Теорема 1. *Пусть $0 < \gamma < 1/2$. Существует такая последовательность открытых шаров $\{B(x_k,t_k)\}$, что $\sum_k \varphi(\gamma t_k) < \mu(X)$ и вне объединения этих шаров все точки являются правильными. Кроме того, если носитель меры μ содержит $\leq m$ точек, то и указанную последовательность шаров можно считать состоящей из $\leq m$ членов.*

Доказательство. Так как $\gamma < 1/2$, то при подходящих $\alpha < 1$ и $\beta > 2$ будет выполняться равенство $\gamma = \alpha/\beta$.

Очевидно, что $\tau(x) \leq \varphi^{-1}(\mu(X))$ при всех $x \in X$. Положим

$$s_1 = \sup_X \tau(x).$$

Можно считать, что $s_1 > 0$ (иначе неправильных точек нет), и в этом случае найдется такая точка $x_1 \in X$, что $\tau(x_1) > \alpha s_1$. Положим $t_1 = \beta s_1$. Первый шар конструируемой последовательности — это шар $B_1 = B(x_1,t_1)$.

Пусть $X_1 = X$ и $X_2 = X_1 \setminus B_1$. Положим

$$s_2 = \sup_{X_2} \tau(x).$$

Заметим, что $s_2 \leq s_1$. Если $s_2 = 0$, то искомая последовательность сводится к шару B_1. Поэтому можно считать, что $s_2 > 0$, а тогда найдется такая точка x_2, что $\tau(x_2) > \alpha s_2$, и, полагая $t_2 = \beta s_2$, мы получим второй шар $B_2 = B(x_2,t_2)$ конструируемой последовательности.

Следующий шаг начинается с перехода к $X_3 = X_2 \setminus B_2$, и т.д. Ясно, что процесс заведомо оборвется не позже m–го шага, если носитель меры μ содержит $\leq m$ точек. В противном случае получим бесконечную последовательность шаров. В любом случае нам надо оценить φ-сумму. Кроме того, если процесс не обрывается, необходимо убедиться, что вне объединения полученной последовательности шаров все точки правильные.

Если $i < k$, то $B(x_i, s_i) \cap B(x_k, s_k) = \varnothing$. Действительно, если это пересечение не пусто, то

$$d(x_i, x_k) \le s_i + s_k \le 2s_i$$

(потому что $i < k$, а последовательность $\{s_k\}$ монотонно не возрастает). Вместе с тем, $d(x_i, x_k) \ge t_i = \beta s_i > 2s_i$. Поэтому указанные шары не имеют общих точек.

Очевидно, что

$$s_i \ge \tau(x_i) > \alpha s_i = \gamma t_i.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\sum_k \varphi(\gamma t_k) &< \sum_k \varphi(\tau(x_k)) && (\varphi \text{ возрастает}) \\
&= \sum_k \mu(B(x_k, \tau(x_k))) && (\text{по лемме } 1) \\
&\le \mu(X) && (\text{шары не пересекаются}).
\end{aligned}$$

Из сходимости ряда вытекает, что $\varphi(\gamma t_k) \to 0$ при $k \to \infty$, а тогда и $t_k \to 0$. Поэтому $s_k \to 0$, откуда следует, что вне построенной последовательности шаров все точки правильные. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Естественно предположить, что константу γ в теореме 1 можно заменить на $1/2$ (с одновременной заменой каких-то строгих неравенств на нестрогие). Это не сложно сделать, если речь идет о конечномерном евклидовом пространстве X и мере *μ с конечным носителем.* Я не знаю, возможна ли подобная замена в общем случае. Следующий пример показывает, что допустимое γ *непременно удовлетворяет условию* $\gamma < 2/3$.

В качестве X мы рассмотрим границу правильного шестиугольника на комплексной плоскости с вершинами в точках $e^{2\pi i m/6}$, $0 \le m \le 5$. На X рассматривается внутренняя метрика (вдоль контура). На каждом из ребер определена естественная мера Лебега, и мы обозначим через λ_1 меру на X, «составленную» из этих, так что $\lambda_1(X) = 6$.

На контуре X рассмотрим меру μ, сосредоточенную в точках ± 1, причем $\mu(\{\pm 1\}) = 1$. Тогда $\mu(X) = 2$.

Наконец, пусть $\varphi(t) = t$. Легко убедиться, что правильными точками будут только вершины шестиугольника, отличные от ± 1. Поэтому система $\{B(x_k, t_k)\}$ должна покрывать весь шестиугольник, за исключением, быть может, четырех указанных вершин. Можно предположить, что $t_k \le 3$ при всех k (иначе хватило бы одного шара, и этот случай проще остальных). Тогда $\lambda_1(B(x_k, t_k)) = 2t_k$, и выходит, что $\sum_k t_k \geq 3$. С другой стороны, если теорема 1 выполняется с некоторым γ, то выполняется неравенство $\gamma \sum_k t_k < 2$, так что $\gamma < 2/3$.

2. Конечномерные приложения

1. Мы начнем с теоремы Харди – Литтлвуда – Винера о максимальной функции и оценке слабого типа, поскольку этот результат в обход тонких теорем о покрытиях получается непосредственно из теоремы 1. Заметим, что с детального обсуждения максимальных функций начинается классическая книга [10], в которой «основная теорема» выводится из леммы Витали о покрытиях.

В этом пункте мы рассматриваем стандартное $\mathbb{R}^n$ с обычной нормой. Через λ_n будет обозначаться нормированная мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

В дальнейшем (чтобы не отвлекаться на несущественные детали) фиксируем некоторую функцию $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Классическая теорема Лебега устанавливает, что соотношение

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\lambda_n(B(x,t))} \int\limits_{B(x,t)} f(y)\, dy = f(x) \tag{2}$$

выполняется для λ_n-почти всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Максимальная функция Mf получается в результате грубой замены левой части в (2):

$$(Mf)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t>0} \frac{1}{\lambda_n(B(x,t))} \int\limits_{B(x,t)} |f(y)|\, dy.$$

Следующая теорема Харди — Литтлвуда — Винера среди прочего довольно быстро приводит к теореме Лебега.

Теорема 2. *Для каждого* $\alpha > 0$

$$\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n \mid (Mf)(x) \geq \alpha\}) \leq \frac{A}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy, \tag{3}$$

где можно взять $A = 2^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы будем считать, что $f(y) \geq 0$ при всех y. Определим меру μ равенством

$$\mu(E) = \int\limits_E f(y)\, dy.$$

Точки x, в которых условие $(Mf)(x) \geq \alpha$ *выполняется,* составляют множество, дополнительное к множеству φ–правильных точек, где $\varphi(t) = \alpha v_n t^n$; здесь v_n — объем единичного шара. Пусть $\gamma \in (0, 1/2)$. По теореме 1, совокупность неправильных точек покрывается системой шаров $\{B(x_k, t_k)\}$, для которых

$$\alpha v_n \gamma^n \sum_k t_k^n < \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy,$$

откуда неравенство (3) получается предельным переходом $\gamma \to 1/2$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Хотя это не существенно, отметим все-таки, что лемма Витали приводит к константе 5^n вместо 2^n.

2. Начиная с этого места мы наряду с $d(x, y)$ будем писать $|x-y|$ (как если бы речь шла о комплексных числах). Такая запись делает многие формулы более выразительными и, кроме того, оправдана возможностью погрузить метрическое пространство в нормированное.

В этом пункте мы рассмотрим логарифмический потенциал

$$u(x) = \int\limits_X \log \frac{1}{|x-y|}\, \mu(dy). \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть* $\gamma \in (0, 1/2)$ *и* $h > 0$. *Существует такая система шаров* $\{B(x_k, t_k)\}$, *что* $\gamma \sum_k t_k < h$ *и* $u(x) < -\mu(X) \log(h/e)$ *вне этих шаров.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем теорему 1 с $\varphi(t) = ct$, где $ch = \mu(X)$. Необходимая оценка суммы радиусов удаляемых шаров очевидна.

К потенциалу (4) в правильных точках применим формулу (1), причем возникающий интеграл по промежутку $[0, \infty)$ разобьем на два слагаемых: по промежутку $[0, h)$ и дополнительному. Для второго слагаемого, используя монотонность логарифма, получаем

$$\int\limits_h^\infty \log(1/t)\, dg_x(t) \leq -(\log h)[\mu(X) - g_x(h)].$$

Для первого слагаемого, интегрируя по частям и используя неравенство $g_x(t) < ct$, получаем

$$\int\limits_0^h \log(1/t)\, dg_x(t) < -(\log h) g_x(h) + ch.$$

Если совместить эти оценки, то получим искомое неравенство. Теорема доказана.

Применяя теорему 3 к мере с конечным носителем, мы получим неравенство, из которого легко выводится классическая лемма Картана для полиномов.

Еще проще получаются оценки потенциалов Рисса из [6], поскольку вместо логарифма теперь приходится иметь дело со степенными функциями на полуоси, сохраняющими знак.

3. Классическая теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных на отрезке функций полиномами имеет многочисленные доказательства и обобщения. Пожалуй, одним из наиболее интересных и простых (но далеко не тривиальных) является теорема М.А. Лаврентьева о равномерной аппроксимации всех непрерывных функций на компакте $E \subset \mathbb{C}$ сужениями на E полиномов.

Обозначим через $P(E)$ замыкание в $C(E)$ (с sup-нормой по E) совокупность (сужений) всех полиномов от $z = x_1 + ix_2$. Из принципа максимума модуля для аналитических функций вытекает, что если $P(E) = C(E)$, то (a) компакт E не имеет внутренних точек и (b) множество $\mathbb{C} \setminus E$ связно. Теорема Лаврентьева устанавливает, что верно и обратное.

Мы наметим схему (увы, не очень короткого) доказательства, которое использует теорему 1. Детали доказательства (в том, что касается перехода от вещественных мер к общим) можно восстановить по [11, гл. 2, п. 8]. Заметим, однако, что привлечение теоремы 1 для доказательства теоремы Лаврентьева обычно не используется, а используется задача Дирихле.

В силу теоремы Хана – Банаха и теоремы Рисса достаточно установить, что, кроме нулевой, нет мер, сосредоточенных на E и ортогональных к $P(E)$. Если ν — некоторая мера, сосредоточенная на E, то ее преобразованием Коши называется функция

$$N(\zeta) = \iint\limits_E \frac{\nu(dx)}{z - \zeta},$$

где $dx = dx_1 dx_2$. Из теоремы Фубини вытекает, что интеграл, представляющий преобразование Коши, сходится λ_2-почти всюду* и $N(\zeta)$ — локально-суммируемая функция. Есть много способов доказать, что из равенства $N(\zeta) = 0$ п.в. вытекает $\nu = 0$.

Если мера ν ортогональна к $P(E)$, то легко убедиться, что $N(\zeta) = 0$ при $\zeta \notin E$. Поэтому для доказательства теоремы Лаврентьева достаточно установить, что при выполнении условий (a) и (b) нулевое значение «по непрерывности» распространится на (почти все) E.

*Кстати, это тоже можно вывести из теоремы 1, используя мажоранты $\varphi(t) = ct^2$.

Весьма общие соображения позволяют ограничиться вещественными мерами ν, ортогональными к $P(E)$, и вместо преобразования Коши рассмотреть логарифмический потенциал

$$L(\zeta) = \iint\limits_E \log|z-\zeta|\,\nu(dx).$$

Снова $L(\zeta)=0$ вне E. Преимущество рассмотрения L вместо N состоит в том, что логарифмическая особенность слабее.

Предположим, что для некоторых $a>0$ и $b>0$ выполняется неравенство $\lambda_2(F)>b$, где F — компакт, содержащийся в $\{z \mid L(\zeta)>a\}$ (разумеется, интеграл предполагается «абсолютно сходящимся»), и покажем, что это приводит к противоречию (с условиями (a) и (b)). Пусть $p_1\colon \mathbb{C}\to\mathbb{R}$ — проекция на ось x_1 и $F_1=p_1(F)$. По теореме Фубини, $\lambda_1(F_1)>0$.

Пусть $\mu=|\nu|$ — вариация меры ν. Положим $\varphi(t)=ct$ (величиной константы c мы распорядимся чуть ниже), и пусть $\{B(z_k,t_k)\}$ — система дисков, покрывающих все φ-неправильные точки по отношению к мере μ (и некоторому $\gamma\in(0,1/2)$). Константа c выбирается из условия $\mu(E)/\gamma c<\lambda_1(F_1)$.

Легко убедиться, что на множестве $\mathbb{C}\setminus G_c$, где $G_c=\bigcup_k B(z_k,t_k)$, функция $L(\zeta)$ непрерывна.

Так как F_1 — множество положительной меры, то у него есть точки плотности. Для нас важно, что оно содержит предельную точку, которую обозначим ξ_0.

На прямой $p_1^{-1}(\{\xi_0\})$ функция $L(\zeta)$ непрерывна. Кроме того, на этой прямой есть такая точка ζ_0, что $L(\zeta_0)>a$. Следовательно, найдется такой отрезок $\Delta_0=[\alpha_0,\beta_0]\subset p_1^{-1}(\xi_0)$, что $L(\zeta)>a$ во всех точках этого отрезка.

Используя тот факт, что ξ_0 — предельная точка (см. выше), рассмотрим последовательность попарно различных точек $\xi_m\to\xi_0$ с аналогичными прообразами относительно проекции на ось. Мы можем считать, что во всех точках объединения $\bigcup\Delta_m$ соответствующих отрезков, концы которых сходятся к концам отрезка Δ_0, выполняется неравенство $L(\zeta)>a$.

Теперь мы увеличим c для того, чтобы иметь $\mu(E)/\gamma c<|\beta-\alpha|/2$, и аналогично проведем горизонтальные прямые, пересекающие Δ_0. В результате образуются узкие прямоугольники, границы которых содержатся в E. Однако существование такого прямоугольника противоречит совокупности условий (a) и (b). Источник противоречия — отрицание того факта, что $L(\zeta)=0$ п.в.

3. Бесконечномерное приложение

1. Мы начнем с двух замечаний.

Пусть μ — конечная неотрицательная борелевская мера в $\mathbb{R}^n$. Из теоремы Фубини вытекает, что при $\alpha < n$ для λ_n–почти всех $a \in \mathbb{R}^n$ существует потенциал

$$u(a) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\mu(dx)}{|x-a|^\alpha}.$$

Оценка допустимых α является точной. Поэтому допустимая сингулярность тем выше, чем больше n, и это наводит на мысль, что при замене $\mathbb{R}^n$ бесконечномерным банаховым пространством X при большинстве точек $a \in X$ потенциал будет существовать при любой сингулярности. Однако конец этой декларации по ряду причин не очень ясен. Основная причина — отсутствие естественного аналога меры Лебега. Поэтому проваливается не только рассуждение, связанное с теоремой Фубини, но и заявление о «большинстве».

С другой стороны, известно (см., напр., [12, с. 18]) замечание Улама: носитель конечной меры в полном сепарабельном метрическом пространстве есть объединение не более чем счетного семейства компактов. В конечномерном пространстве это ничего не говорит о массивности дополнения к носителю, тогда как в бесконечномерном банаховом пространстве говорит многое: в таком пространстве должно существовать много точек, вблизи которых масса (мера) очень мала.

Теорема 1 позволяет придать точный количественный смысл этим намекам.

2. Мы рассмотрим ситуацию, промежуточную между банаховыми и общими метрическими пространствами.

Пусть X — абелева группа. Мы будем называть X нормированной группой, если на X отмечена функция $x \to |x|$ со значениями в $\mathbb{R}_+$, для которой $|-x| = |x|, |x+y| \le |x| + |y|$ для всех $x, y \in X$ и $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$ (нулевой элемент группы). Согласно теореме Биркгофа — Какутани (см., напр., [13]) каждая метризуемая группа допускает нормировку. С другой стороны, ясно, что $d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} |x-y|$ есть метрика.

Мы будем считать такую метрику фиксированной. Кроме того, как обычно, будем предполагать, что относительно этой метрики X является полным сепарабельным метрическим пространством.

Группа X называется *типично бесконечномерной*, если в X нет (кроме пустого) открытых множеств с компактным замыканием. Среди сепарабельных банаховых пространств их аддитивная группа типично бесконечномерна в точности тогда, когда пространство бесконечномерно.

При работе в категории типично бесконечномерных групп (и даже пространств Фреше) следует соблюдать некоторую осторожность, так как группа (в отличие от банаховой модели) может иметь конечный диаметр.

3. Пусть $\{t_k\}$ — последовательность положительных вещественных чисел и пусть X — сепарабельное банахово пространство. Можно ли покрыть целиком X шарами $B(x_k, t_k)$ при подходящем выборе центров? Ответ зависит от размерности. Если $\dim X = n$, то покрытие возможно тогда и только тогда, когда $\sum_k t_k^n = \infty$. Если же $\dim X = \infty$, то покрытие возможно тогда и только тогда, когда $\overline{\lim}_k t_k > 0$ (разумеется, не тривиальна здесь только необходимость). Это утверждение относительно банаховых пространств получается в качестве следствия одной из приведенных ниже лемм (или непосредственно из теоремы Бэра о вложенных шарах).

4. Пусть $0 < s < t < \infty$. Множество A называется (s,t)-*альтернативным*, если из $x, y \in A$ и $d(x,y) > s$ вытекает, что $d(x,y) \geq t$. Пример: равномерно дискретное множество. Разумеется, множество диаметра $\leq s$ доставляет еще один (тривиальный, но важный) пример.

Пусть $0 < p < q < \infty$. *Элементарная* (p,q)-*система* — это множество B диаметра $\leq q$ и такое семейство $\{C_i\}$ его подмножеств, что $d(C_i, C_j) \geq p$, если $i \neq j$. Пример: шар бесконечномерного банахова пространства и последовательность попарно равномерно удаленных друг от друга шаров внутри этого шара.

В следующей лемме сохраняются введенные выше определения и обозначения. Утверждение непосредственно вытекает из определений.

Лемма 2. *Если $t > q$ и $s < p$, то может существовать не более одного такого i, что $A \cap C_i \neq \varnothing$.*

5. В этом пункте мы дадим простую конструкцию некоторой системы замкнутых шаров в нормированной группе. В дальнейшем эта конструкция будет несколько раз использована при исследовании интегралов.

Мы начинаем с некоторого $r_0 > 0$ и шара $\widehat{B}(a_0^{(0)}, r_0)$. Смысл вычурного обозначения для центра вскоре станет понятным. Для наглядности следует считать, что группа не исчерпывается этим шаром. Этот шар называется системой ранга 0.

Так как шар $\widehat{B}(a_0^{(0)}, r_0)$ не является компактом, существует такое $r_1 > 0$, что в $\widehat{B}(a_0^{(0)}, r_0)$ содержится счетное семейство шаров $\widehat{B}(a_i^{(1)}, r_1)$, попарные расстояния между которыми $\geq r_1$. Будем считать, что $r_1 < r_0/2$. Заметим, что r_1 играет двойную роль, и это не несет специальной смысловой нагрузки и объясняется только стремлением не особенно размножать обозначения. Маленькие шары называются шарами ранга 1. Эти шары вместе с исходным составляют элементарную (r_1, r_0)-систему.

Теперь мы отмечаем какой-нибудь шар ранга 1, принимаем его за исходный и повторяем конструкцию. Появляется число r_2 и шары ранга 2.

Продолжая в том же духе, мы получим $r_3, r_4, \dots$. Систему всех шаров будем называть *системой Бэра* или B-системой.

Примечательно, что имея B-систему, мы можем отметить один из шаров некоторого ранга m (и, стало быть, радиуса r_m), принять его за исходный и сохранить шары следующих рангов. Тогда снова получится B-система. Кроме того, сдвиг B-системы — снова B-система.

З а м е ч а н и е. Пусть X — бесконечномерное сепарабельное банахово пространство и $\{x_k\}$ — счетное всюду плотное множество в X. Пусть $\{t_k\}$ — такая последовательность положительных чисел, что $t_k \to 0$ при $k \to \infty$. Пусть $G = \bigcup_k B(x_k, t_k)$. Тогда G — большое множество в том смысле, что оно является открытым и всюду плотным, а дополнительное множество F, стало быть, является «маленьким». Однако F *нельзя представить* в виде счетного объединения шаров (пространства F) с радиусами, убывающими к 0, тогда как дополнительное множество *так представлено* и поэтому его можно считать «маленьким», а F — большим. Описанная коллизия на тему «что типично», может, представляет интерес, но, разумеется, далеко не уникальна. Например, почти все числа хорошо аппроксимируются рациональными, однако хорошо аппроксимируемые числа составляют множество 1-й категории.

6. Пусть $K = K(t)$ — комплексная борелевская функция на полуоси $t > 0$, относительно которой дополнительно предполагается ограниченность на каждой полуоси $t \geq t_0 > 0$. Пусть ν — комплексная борелевская мера на X конечной полной вариации. Через μ мы будем обозначать вариацию меры ν, так что $\mu \geq 0$ и $\nu(E) = \int_E h(x)\,\mu(dx)$, где $|h(x)| = 1$ при всех $x \in X$.

В предположении, что X — типично бесконечномерная группа, нас будет интересовать множество тех $a \in X$, для которых существует (в качестве абсолютного) интеграл

$$u(a) = \int\limits_X K(|x-a|)\,\nu(dx). \tag{5}$$

Если этот вопрос решен, то естественно возникает проблема единственности, на которой мы также остановимся (в следующем разделе).

Для простоты будем считать, что при $t > 0$ имеет место оценка $|K(t)| \leq F(t)$, где F и F' — ограниченные непрерывные функции на каждой полуоси $[\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$. Ясно, что существование абсолютного интеграла (5) вытекает из существования аналогичного интеграла

$$v(a) = \int\limits_X F(|x-a|)\,\mu(dx), \tag{6}$$

который, кстати, можно считать частным случаем предыдущего. Следующая теорема — простейшее утверждение о массивности множества точек сходимости.

Теорема 4. *Если X — типично бесконечномерная группа, то множество точек, для которых интеграл* (6) *сходится, обильно в том смысле, что оно всюду плотно в X, континуально и не допускает представления в виде счетного объединения (своих) шаров, радиусы которых стремятся к* 0.

Доказательство. Удобно (и можно) предположить, что $F(t) = 0$ при всех достаточно больших t. Сначала выберем такую мажоранту φ, чтобы при $t \to 0$ иметь $\varphi(t)F(t) \to 0$ и $\varphi(t)|F'(t)| \to 0$.

Трюк состоит в том, что эта мажоранта заменяется на $\varphi_N(t) = N\varphi(t)$, после чего N выбирается достаточно большим. Это позволит доказать, что в шаре ранга 0 есть много φ_N-правильных точек.

Пусть $\{B(x_k, t_k)\}$ — семейство шаров, выбранное в соответствии с теоремой 1 по отношению к мажоранте φ_N. Так как $t_k \to 0$, то можно считать, что $t_1 \geq t_2 \geq \ \ldots$.

Далее, $\gamma t_1 < \varphi_N^{-1}(\mu(X))$. Отсюда следует, что $t_1 < r_1$, если N выбрано достаточно большим. Заметим, что тогда $t_k < r_1$ при всех k. Имея это в виду, перейдем ко второму трюку.

Мы можем так подобрать $1 = k_1 < k_2 < \ \ldots$, чтобы при $k_i \leq k < k_{i+1}$ выполнялось неравенство $t_k < r_i$. Заметим, что выбор N обеспечивает выполнение этого условия для начальной «пачки», а что касается остальных, то эта возможность обеспечивается условием $t_k \to 0$.

Остальное вытекает из теоремы о вложенных шарах. Действительно, по тривиальному случаю леммы 2 каждый из шаров первой пачки ($k < k_2$) задевает не более одного шара ранга 1, и мы можем отметить любой из счетного множества остальных. Взяв этот шар ранга 1, переходим ко второй пачке, в конце отмечаем шар ранга 2, и т.д. Пересечение отмеченных шаров дает ψ-правильную точку, и остается применить принцип Кавальери. Доказательство без труда доводится до конца (после надлежащего уточнения последнего утверждения).

4. Редукция сингулярного уравнения к регулярному

1. Теорема 4 естественно ставит вопрос о тривиальности меры ν, если $u(a) = 0$ каждый раз, когда потенциал существует в качестве абсолютного. Кстати, выяснение этого вопроса может оказаться полезным для теории случайных процессов, так как случайный процесс зачастую допускает реализацию как мера в некотором банаховом пространстве.

Не удивительно, что эту проблему единственности проще решать в ситуации, когда функция $K(t)$ не имеет особенности при подходе к точке $t = 0$, например, остается ограниченной (регулярное уравнение).

В этом разделе мы покажем, как в определенных случаях сингулярное уравнение на типично бесконечномерной группе порождает регулярное с некоторым ядром $\widetilde{K}$ вместо K, причем если ядро $\widetilde{K}$ приводит к $\nu = 0$, то проблема единственности оказывается положительно решенной и в отношении исходного уравнения. Схема, которую мы опишем, в некотором смысле есть формализация приема, который довольно давно изобрел В. Линде (Werner Linde) для решения проблемы единственности в регулярной ситуации для некоторых частных случаев (см., напр., [14]). Вместе с тем нам придется усовершенствовать рассуждение, которое мы применили при доказательстве теоремы 4, в частности, лемма 2 потребуется в полном объеме.

2. Введем некоторые дополнительные определения.

Через $\{\mathbb{R}_+, \oplus\}$ обозначаем неотрицательную полуось, снабженную структурой абелевой полугруппы с операцией $a \oplus b$. Предполагается, что $a \leq (a \oplus b)$ и что полугрупповая операция совместима со стандартной топологией на $\mathbb{R}_+$. Наиболее важные примеры:

$$a \oplus b = a + b \;\text{ и }\; a \oplus b = \max\{a, b\}.$$

Далее, мы предполагаем, что имеет место представление $K = f \circ \psi$, где ψ — некоторый гомеоморфизм $\mathbb{R}_+$, непрерывно дифференцируемый при $t > 0$. Типичный пример — $\psi(t) = t^p$, $p > 0$.

Пусть $c > 0$. *Элементарной L-системой* (в честь В. Линде) мы будем называть такую (счетную) последовательность $\{e_n\} \subset X$, что $|e_n| = c$ $(= \mathrm{const} > 0)$ и

$$\psi(|x - e_n|) \to \psi(|x|) \oplus \psi(c) \;\text{ при каждом }\; x \in X,$$

если $n \to \infty$. Легко убедиться, что для L-системы можно предположить (и мы будем это делать) существование такой константы $b_0 > 0$, что при $p \neq q$ выполняется неравенство $|e_p - e_q| \geq b_0$. Поэтому L-систем нет в конечномерных банаховых пространствах.

Положительные примеры дают бесконечномерные сепарабельные L^p-пространства. Например, в случае l_p, $p \geq 1$, при $\psi(t) = t^p$ элементарной L-системой будет стандартная система ортов.

При $0 < p \leq 1$ пространство $L^p(0,1)$ снабжается (как группа по сложению) нормой $|x| = \int_0^1 |x(t)|^p \, dt$. При $\psi(t) = t$ такое пространство обладает элементарной L-системой, снова относительно операции $s \oplus t = s + t$ на $\mathbb{R}_+$.

Пусть Ω — локально-компактное, но не компактное метрическое пространство и $X = C_0(\Omega)$ — пространство всех непрерывных функций на Ω, «исчезающих на бесконечности», снабженное sup-нормой. Пространство X обладает элементарной L-системой при $\psi(t) = t$ относительно операции $s \oplus t = \max\{s, t\}$.

Для доказательства теоремы о редукции нам потребуется следующее простое обобщение теоремы Лебега о предельном переходе.*

Лемма 3. *Пусть $\{T, \rho\}$ — пространство с σ-конечной мерой. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность ρ-измеримых функций и пусть ρ-п.в. имеет место сходимость $f_n \to f$. Пусть $\{g_n\}$ — последовательность ρ-суммируемых функций, пусть ρ-п.в. $|f_n| \le g_n$ и пусть ρ-п.в. имеет место сходимость $g_n \to g$. Если $\int_T g_n(t)\,\rho(dt) \to \int_T g(t)\rho(dt) < \infty$, то f — суммируемая функция и $\int_T f_n(t)\,\rho(dt) \to \int_T f(t)\rho(dt)$.*

Доказательство. Мы наметим доказательство в предположении, что все функции вещественные. Заметим, что f — суммируемая функция, так как $|f| \le g$ п.в.

Поскольку $g_n \pm f_n \ge 0$, то, по лемме Фату,

$$\int_T (g \pm f)(t)\,\rho(dt) \le \underline{\lim} \int_T (g_n \pm f_n)(t)\,\rho(dt)$$
$$= \int_T g(t)\,\rho(dt) + \underline{\lim} \int_T (\pm f_n)(t)\,\rho(dt),$$

откуда следует, что

$$\overline{\lim} \int_T f_n(t)\,\rho(dt) \le \int_T f(t)\,\rho(dt) \le \underline{\lim} \int_T f_n(t)\,\rho(dt),$$

и лемма доказана.

3. В теореме о сведении сингулярного потенциала к регулярному формулы и рассуждения упрощаются, если предположить, что $\psi(t) = t$ при всех $t \ge 0$, *и мы сделаем такое предположение.* При этом мы сохраним $L^1(\Omega)$ и $C_0(\Omega)$, однако потеряем остальные L^p-пространства. Впрочем, изменения, которые надо внести в доказательство, чтобы включить эти пространства, носят чисто технический характер, и мы не будем здесь на этом останавливаться.

В дальнейшем мы сохраняем обозначения и объекты, введенные в этом разделе, а также в разд. 3.

*Эта лемма приводится (без доказательства) в некоторых современных учебниках по теории меры и интеграла с пропуском безусловно снижающего изящество формулировки последнего условия. Однако без этого условия утверждение перестает быть верным ($f_n = g_n$, примеры к лемме Фату). Поэтому мы дадим доказательство.

Теорема 5. *Пусть X — типично бесконечномерная группа с L-системой $\{e_n\}$. Существует такое обильное множество точек $a \in X$, что все фигурирующие ниже интегралы существуют как интегралы Лебега и*

$$\int_X K(|x-a-e_n|)\,\nu(dx) \to \int_X K(|x-a| \oplus c)\,\nu(dx) \tag{7}$$

при $n \to \infty$.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Имея в виду лемму 3, заменим K на F и ν на μ. Кроме того, будем считать, что $F(t) = 0$ при $t \geq c_1$ и $c_1 < c$. Положим $F_n(x) \overset{\text{def}}{=} F(|x-a-e_n|)$. Тогда $F_n(x) \to 0$ при каждом x, и нам остается убедиться, что $\int_X F_n(x)\,\mu(dx) \to 0$ при $n \to \infty$ для подходящих a.

Выберем мажоранту φ так же, как в доказательстве теоремы 4, и снова рассмотрим $\varphi_N = N \cdot \varphi$.

Отметим B-систему и ограничимся проверкой, что при достаточно большом N исходный шар этой системы содержит точку a с объявленными свойствами.

Пусть $\{B(x_k, t_k)\}$ — последовательность шаров, построенная по мажоранте φ_N в соответствии с теоремой 1. Мы опять можем считать, что $t_1 \geq t_2 \geq \ldots$, так как $t_k \to 0$. Первое условие на величину N, как и в теореме 1, должно приводить к неравенству $t_1 < r_1$, но в данном случае (в отличие от теоремы 1) этим дело не ограничивается.

Очевидно, что при $p \neq q$ и всех k

$$d\left(B(x_k, t_k) + e_p, B(x_k, t_k) + e_q\right) \geq b_1 = b_0 - 2t_1$$

и N должно быть выбрано настолько большим, чтобы иметь $b_1 > 2r_0$.

Теперь, как и при доказательстве теоремы 4, мы выбираем последовательность $1 = k_1 < k_2 < \ldots$. Отличие на первом шаге состоит в следующем. В теореме 4 при $k_1 \leq k < k_2$ шар $B(x_k, t_k)$ мог иметь общую точку только с одним шаром B-системы ранга 2. Теперь мы можем утверждать, что при таком k все шары последовательности

$$B(x_k, t_k) + e_n, \ \ n = 1, 2, \ \ldots,$$

кроме, быть может одного, не имеют пересечений с шарами ранга 2, а оставшийся пересекается лишь с одним таким шаром. Это позволяет для всех шаров пачки с $k_1 \leq k < k_2$ и произвольным n выбрать такой шар ранга 2, который не пересекается ни с одним шаром первой пачки. Отмечая такой шар, мы переходим ко второй пачке, и т.д.

Пусть a — точка из пересечения отмеченных шаров системы Бэра. Тогда, если $t \leq c_1$ и χ_n — индикатор шара $B(a + e_n, t)$, то $\chi_n(x) = 0$ при достаточно большом n (которое может зависеть от x). Действительно, иначе для некоторого x и некоторой подпоследовательности $n = n_i \to \infty$ мы имели бы $x \in B(a + e_n, t)$ и тогда

$$c_1 \geq t > |x - a - e_n| \to |x - a| \oplus c \geq c,$$

хотя $c_1 < c$.

Поэтому при $g_z(t) = \mu(B(z,t))$ имеем

$$\int_X F(|x - a - e_n|)\,\mu(dx) = -\int_0^{c_1} F(t) g_{a+e_n}(t)\,dt \to 0$$

при $n \to \infty$, и доказательство заканчивается.

5. Два примера

1. Последовательность элементов $\{e_n\}$ сепарабельного банахова пространства X будем называть *сильной L-системой,* если для каждого $x \in X$ и *каждого* $t \in \mathbb{R}$ имеет место соотношение

$$|x + te_n| \to |x| \oplus |t| \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Сильная L-система с $a \oplus b = a + b$ существует в бесконечномерном $L^1(\Omega)$. В $C_0(\Omega)$, где Ω — локально-компактное, но не компактное сепарабельное метрическое пространство, существует сильная L-система, отвечающая $a \oplus b = \max\{a, b\}$.

В сепарабельных банаховых пространствах имеет место следующая теорема Прайса – Тишера [15] (новое доказательство дано в [16]): если две регулярные борелевские вероятностные меры совпадают на шарах достаточно большого радиуса, то они совпадают на всех борелевских множествах. При рассмотрении первого примера будет использован частный случай этой теоремы (кстати, известный раньше). Во втором случае используется ее усиление (в этом случае), принадлежащее Е.А. Рисс [17, 18].

Мы намерены в этих двух случаях кратко обсудить, определяется или нет мера потенциалом. Теорема 5 в известном смысле сводит проблему единственности к случаю регулярных интегральных ядер, и мы здесь будем рассматривать только такие. Чтобы подчеркнуть последнее обстоятельство, будем писать f вместо K. Итак, теперь мы хотим обсудить, когда для (некоторых) банаховых пространств X из соотношения

$$\int_X f(|x - a|)\,\nu(dx) = 0 \ \text{ при всех } \ a \in X$$

вытекает, что $\nu = 0$, где f — ограниченная борелевская функция на полуоси $t \geq 0$. По теореме Прайса – Тишера, последнее имеет место тогда и только тогда, когда $\nu_a = 0$ при каждом a, где ν_a — мера на полуоси $t \geq 0$, порожденная мерой ν при отображении $x \to |x - a|$.

Если пространство X обладает сильной L-системой (а так обстоит дело в обоих случаях, которые мы собираемся рассмотреть), то написанное уравнение порождает серию уравнений на полуоси,

$$\int_0^\infty f(s \oplus t)\, \nu_a(ds) = 0 \text{ при всех } t \geq 0. \tag{8}$$

2. При $X = L^1(\Omega)$, опуская индекс a и считая, что речь идет об интеграле Лебега – Стилтьеса, мы можем переписать уравнение (8) в виде соотношения

$$h(t) = \int_0^\infty f(s + t)\, \rho(ds), \tag{9}$$

где h — ограниченная борелевская функция, причем $h(t) = 0$ при $t \geq 0$, и вопрос теперь состоит в том, при каких f отсюда вытекает, что $\rho = 0$.

Первые частные случаи указаны в [14], а более широкие классы — в [9] и [19]. Кстати, в примечании при корректуре к последней работе мною указаны существенно более широкие классы, однако здесь я ограничусь только намеком на то, каковы эти классы.

Для функции f преобразование Фурье имеет смысл при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и определяется равенством

$$\widehat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{i\lambda t} f(t)\, dt,$$

причем в этой полуплоскости $\widehat{f}$ является аналитической функцией.

Простейшее дополнительное предположение состоит в том, *что f продолжается до функции, аналитической и ограниченной в некоторой окрестности угла* $|\arg z| \leq \theta$, $\theta > 0$ (для наглядности можно считать, что $0 < \theta < \pi/2$). Тогда $\widehat{f}$ продолжается до аналитической функции внутри развернутого угла $-\theta < \arg\lambda < \pi + \theta$.

Преобразование Фурье $\widehat{\rho}(\lambda)$ меры ρ также является функцией, аналитической в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и непрерывной в ее замыкании.

Напротив, функция h является ограниченной и сосредоточенной на полуоси $t \leq 0$. Поэтому ее преобразование Фурье определено и аналитично в нижней полуплоскости, $\operatorname{Im}\lambda < 0$.

Из уравнения (9) вытекает, что в общей области определения (т.е. в углах $-\theta < \arg\lambda < 0$ и $\pi < \arg\lambda < \pi + \theta$) имеет место равенство

$$\widehat{h}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) \cdot \widehat{\rho}(-\lambda). \tag{10}$$

Из уравнения (10) вытекает, что *если $\rho \neq 0$, то $\widehat{f}$ аналитически продолжается до мероморфной функции в* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому, если такого продолжения нет, то $\rho = 0$. В качестве ρ можно взять любую из мер ν_a. Из теоремы Прайса – Тишера вытекает, что тогда $\nu = 0$. Тем самым мы получаем (часто легко проверяемое) *достаточное условие единственности.*

Если отмеченное условие аналитического продолжения выполняется, то исследование можно продолжить и в определенных случаях довести до обозримых критериев единственности, однако мы не будем здесь в это углубляться.

3. В предыдущем примере решающую роль сыграло применение преобразования Фурье функций, сосредоточенных на полуоси, т.е. преобразование Лапласа. Успех этой процедуры в заметной мере объясняется обилием множества непрерывных (полу)характеров, т.е. гомоморфизмов из полугруппы $\mathbb{R}_+$ с операцией $a \oplus b = a + b$ в полугруппу $\{\mathbb{C}, \times\}$.

В примере с $C_0(\Omega)$, к которому мы теперь переходим, в уравнении (8) будет $s \oplus t = \max\{s,t\}$. В полугруппе $\mathbb{R}_+$ с операцией $a \oplus b = \max\{a,b\}$ имеем $a \oplus a = a$ для всех a, так что в этом случае непрерывных характеров нет и методы классического гармонического анализа не работают. Оказывается, однако, что к цели приводит классическая теория функций.

Отметим, что частный случай приводимого ниже результата получен в упомянутой работе В. Линде. Затем далеко идущие обобщения получила Л.В. Караулова. Окончательный результат (без детального доказательства) впервые был объявлен в [20].

Опуская индекс a, уравнение (8) теперь можно переписать в виде соотношения

$$\int_0^\infty f(\max\{s,t\})\, dg(s) = 0 \ \text{ при всех } \ t \geq 0,$$

где g — непрерывная слева функция ограниченной полной вариации, $g(t) = 0$ при $t \leq 0$. Очевидно, что это соотношение равносильно тому, что

$$\int_0^t f(s)\, dg(s) = f(t)g(t) \ \text{ при всех } \ t \geq 0. \tag{11}$$

В приводимых ниже леммах (место которым — в учебниках) условие (11) считается выполненным. Условие ограниченности функции $|f|$ и условие ограниченности вариации функции g достаточно предположить выполненными на каждом конечном промежутке. Заметим, что интеграл в (11) надо понимать в смысле Лебега – Стилтьеса, так что левую часть аккуратнее писать в виде $\int_{[0,t)} f(s)\,dg(s)$.

Если предположить, что на интервале (a,b) функции f и g имеют непрерывные производные, причем $g'(t) \neq 0$, то получится, что $f'|(a,b) = 0$, так что $f|(a,b) = \mathrm{const}$. Смысл приводимых лемм в том, что предположение о производных здесь практически не существенно.

Лемма 4. *Пусть $t > 0$. Если $g(t) \neq 0$, то $f(t-0) = f(t)$. Если $g(t+0) \neq 0$, то $f(t+0) = f(t)$. В обоих случаях существование пределов (для функции f) заранее не предполагается.*

Доказательство. Докажем второе утверждение (первое устанавливается проще). Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} f(t+\varepsilon)g(t+\varepsilon) &= \int\limits_{[0,t+\varepsilon)} f(s)\,dg(s) \\ &= f(t)g(t) + f(t)(g(t+0) - g(t)) + \int\limits_{(t,t+\varepsilon)} f(t)\,dg(t) \\ &= f(t)g(t+0) + \int\limits_{(t,t+\varepsilon)} f(t)\,dg(t), \end{aligned}$$

и отсюда следует, что

$$(f(t+\varepsilon) - f(t))g(t+0) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Лемма доказана.

Пусть $0 \leq a < b < \infty$. Обозначим через $V_a^b(h)$ полную вариацию функции h на промежутке $[a,b]$.

Лемма 5. *Пусть*

$$\varepsilon = \inf_{[a,b]} |g(t)| > 0.$$

Тогда $f|[a,b] = \mathrm{const}$.

Доказательство. Из леммы 4 вытекает, что f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Пусть $M = \sup_{[a,b]} |f(t)|$. Так как

$$V_a^b(1/g) \leq (1/\varepsilon^2) \cdot V_a^b(g),$$

то

$$V_a^b(f) \le V_a^b(1/g) \cdot V_a^b(fg) \\ \le M \cdot (1/\varepsilon^2) \cdot [V_a^b(g)]^2 < \infty.$$

Таким образом, $f|[a,b]$ — непрерывная функция ограниченной вариации. Это позволяет понимать интегралы как интегралы Римана – Стилтьеса и интегрировать по частям. В результате получается, что

$$\int\limits_\alpha^\beta g(t)\,df(t) = 0 \qquad (a \le \alpha \le \beta \le b).$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_\alpha^\beta h(t)\,df(t) = 0$$

для каждой ограниченной борелевской функции h на $[a,b]$. Если положить $h = 1/g$, то получим, что $f(a) = f(b)$. Остальное очевидно. Лемма доказана.

Предположим, что $f|(0,\infty) \ne \mathrm{const}$. Тогда легко доказать существование такого $r > 0$, что будет выполняться хотя бы одно из следующих условий: существует такая строго возрастающая последовательность $t_k \to r$, что $f(t_k) \ne f(r)$; существует такая строго убывающая последовательность $s_k \to r$, что $f(s_k) \ne f(r)$.

Для определенности будем считать, что f и r связаны первым условием. Если теперь f и g удовлетворяют названным выше условиям, включая условие (11), то, по лемме 5, будем иметь $g(r) = 0$.

При фиксированной функции f функция g в этом рассуждении может меняться. В результате получится, что $\nu(B(a,r)) = 0$ при всех $a \in C_0(\Omega)$.

Мы установили последнее условие лишь при одном r, так что не можем применить теорему Прайса – Тишера. Однако, если Ω не имеет изолированных точек, то, как это вытекает из упомянутых результатов Е.А. Рисс, одного r достаточно для утверждения, что $\nu = 0$. Отметим, кстати, что в данном случае ее рассуждение можно немного упростить, если привлечь дополнительно соображения, приведенные в [12, с. 33].

6. Заключительные замечания

1. При оценке некоторых интегралов, возникающих в задачах теории функций, появляется необходимость в мажорантах, которые зависят не только от радиуса t, но и от центра x шара $B(x,t)$.

Нетривиальные ситуации могут возникнуть даже в том случае, когда функция $\varphi(x,t)$ непрерывна по совокупности переменных и при каждом $x_0 \in X$ функция $t \to \varphi(x_0,t)$ является мажорантой в прежнем смысле.

С другой стороны, по мере μ и мажоранте $\varphi(x,t)$ можно (как и раньше) построить функцию $\tau = \tau(x)$, и если эта функция окажется ограниченной, то ни в формулировке, ни в доказательстве основной леммы ничего не меняется.

В случае банаховых пространств лемма сохраняется в модифицированной форме, если имеет место оценка

$$\tau(x) \le \alpha\|x\| + \beta,$$

где α и β — положительные константы, причем $\alpha < 1$. Кстати, для оценки функции τ часто имеет смысл привлечь функцию, обратную к φ по переменной t.

Детальное рассмотрение возникающих здесь возможностей увело бы нас слишком далеко и заняло бы много места. Вместо этого мы вкратце рассмотрим несколько простейших примеров.

2. Пусть $X = \mathbb{R}$ и

$$\varphi(x,t) = \frac{ct^\alpha}{1+|x|}, \tag{12}$$

где c и α — положительные константы. В дальнейшем нас будут интересовать не точные количественные, а качественные соотношения, причем мажоранты будут однородными по t (как это имеет место в (12)). Поэтому в формулировках будем игнорировать константу γ.

Пусть $\varepsilon > 0$. Легко убедиться, что при $\alpha \ne 1$ существует такая последовательность интервалов $B(x_k,t_k)$, покрывающая *всю вещественную ось,* что

$$\sum_k \varphi(x_k,t_k) < \varepsilon.$$

Это означает, что при такой мажоранте φ аналог теоремы 1 имеет место при любом выборе меры μ, однако не несет никакой информации. Поэтому содержательные утверждения могут получаться только при $\alpha = 1$, и теперь мы будем считать это условие выполненным.

Пусть $\{B(x_k,t_k)\}$ — последовательность интервалов и $E \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_k B(x_k,t_k)$. Легко проверить, что условия

$$\sum_k \frac{t_k}{1+|x_k|} < \infty \quad \text{и} \quad \int\limits_E \frac{dx}{1+|x|} < \infty \tag{13}$$

эквивалентны.

Второе из условий (13) имеет смысл для каждого измеримого по Лебегу множества E. Множество E, удовлетворяющее этому условию, называется множеством конечной логарифмической длины.

С другой стороны, заменяя $|x_k|$ на $\|x_k\|$, мы видим, что первое из условий (13) имеет смысл для каждого банахова пространства, в частности, для комплексной плоскости. Если семейство дисков с центрами z_k комплексной плоскости удовлетворяет этому условию, то говорят, что оно имеет конечный обзор (интересен только случай, когда $|z_k| \to \infty$, и в этом случае конечна сумма углов, под которыми все эти диски видны из начала координат).

Ясно, что пересечение множества дисков конечного обзора с каждой прямой на плоскости имеет конечную логарифмическую длину.

Введенные понятия среди прочего позволяют установить, что выбор константы c также может оказаться существенным. Если $X = \mathbb{R}$ и $c < \mu(X)$, то все достаточно далекие точки x не будут правильными. Вместе с тем, если бы выполнялся аналог теоремы 1, то неправильные точки (по крайней мере) составляли бы множество конечной логарифмической длины. Однако при $c > \mu(X)$ теорема восстанавливается.

Применяя такие мажоранты на плоскости (и ряд дополнительных соображений), можно показать, что если целая функция f экспоненциального типа удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |f(t)|\, dt}{1+t^2} < \infty,$$

то на почти всех лучах из начала координат, а также на каждом луче вне множества конечной логарифмической длины в определении индикатора роста можно заменить знак верхнего предела на знак предела (т.е. предел существует). Отсюда среди прочего следует, что индикатор произведения равен сумме индикаторов, если хотя бы один из сомножителей принадлежит этому классу (в общем случае это не так).

Список литературы

[1] *R.P. Boas, Jr.*, Entire Functions. Acad. Press Inc., New York, 1954.

[2] *Б.Я. Левин*, Распределение корней целых функций. Гостехиздат, Москва, 1956.

[3] *Б.Я. Левин*, Целые функции (курс лекций). МГУ, Москва, 1971.

[4] *B.Ya. Levin*, Lectures on Entire Functions. AMS Transl. Math. Monogr. **150**. AMS, Providence, RI, 1996.

[5] *Н.С. Ландкоф*, Основы современной теории потенциала. Наука, Москва, 1966.

[6] *У. Хейман, П. Кеннеди*, Субгармонические функции. Мир, Москва, 1980. (Пер. с англ.)

[7] *Е.А. Горин*, Неравенства Бернштейна с точки зрения теории операторов. — *Вестник Харьковск. ун–та, № 205. Прикладная математика и механика, вып. 45.* Харьковск. ун-т, Харьков, 77–105, 1980.

[8] *Ю.А. Брудный, Е.А. Горин*, Изометрические представления и дифференциальные неравенства. Ярославск. ун-т, Ярославль, 1981.

[9] *Е.А. Горин, А.Л. Колдобский*, О потенциалах, идентифицирующих меры в банаховых пространствах. — *Докл. АН СССР* **285** (1985), № 2, 270–274.

[10] *И. Стейн*, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Мир, Москва, 1973. (Пер. с англ.)

[11] *Т. Гамелин*, Равномерные алгебры. Мир, Москва, 1973. (Пер. с англ.)

[12] *П. Биллингсли*, Сходимость вероятностных мер. Наука, Москва, 1977. (Пер. с англ.)

[13] *У. Рудин*, Функциональный анализ. Мир, Москва, 1975. (Пер. с англ.)

[14] *W. Linde*, Uniqueness Theorems in L_r and $C_0(\Omega)$. — *Math. Ann.* **274** (1986), 617–626.

[15] *D. Preiss and J. Tišer*, Measures in Banach Spaces are Determined by their Values on Balls. — *Mathematica* **38** (1991), 391–397.

[16] *E.A. Gorin*, Remarks on the Preiss–Tišer Theorem on Balls. — *Russian J. Math. Phys.* **12** (2005), No. 2, 180–185.

[17] *Е.А. Рисс*, О мерах, совпадающих на шарах. — *Записки научн. сем. ЛОМИ* **177** (1989), 122–128.

[18] *Е.А. Рисс*, Принцип положительности для эквивалентных норм. — *Алгебра и анализ* **12** (2000), вып. 3, 146–172.

[19] *Е.А. Горин, А.Л. Колдобский*, О потенциалах мер в банаховых пространствах. — *Сиб. мат. журн.* **28** (1987), № 1, 65–80.

[20] *E.A. Gorin and L.V. Karaulova*, Convolution Equations on Infinite-Dimensional Abelian Groups. In: Int. Conf. «Diff. Equations and Related Topics». Moscow, May 22–27, 2001. Book of Abstracts, 153–154.

The Cartan Lemma by B.Ya. Levin and its Applications

E.A. Gorin

Faculty of Mathematics, Moscow Pedagogical State University
1 Pirogovskaya Str., Moscow, 117321, Russia

E-mail:evgeny.gorin@mtu-net.ru

Received January 30, 2006

Let $X = \{X, d\}$ be a complete separable metric space and let μ be a nonnegative regular borel measure on X such that $\mu(X) < \infty$. Let $\varphi = \varphi(t)$ be a strictly increasing to infinity continuous real function on the semiaxis $[0, \infty)$, for which $\varphi(0) = 0$. Assume $B(a,t) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid d(x,a) < t\}$. There exist the results called a Cartan lemma and in which is estimated a massiveness of such sets $x \in X$ where the condition

$$\mu(B(x,t)) < \varphi(t) \text{ for all } t > 0,$$

is not fulfilled.

We give one of the delivered appeared while studing of Levin's lectures in Moscow in 1970. Also we give applications to some problems of the finite-dimensional and infinite-dimensional analysis. The peculiarity of our approach is: such parameters as that dimension do not appear in the initial estimates (at least explicitly).

Generally, the article is a review, however some of the given results have not been published yet.

Key words: Cartan's lemma, metric space, measure.

Mathematics Subject Classification 2000: 30-02, 31-02.